Prof. Dr. B. Wilking
Dr. A. Wörner WiSe 2011/12

1. Musterlösung zur Differentialgeometrie 1

Zu Aufgabe 1.1

Der Kreis rolle auf der x-Achse eines kartesischen Koordinatensystems nach rechts. Zur Zeit $t = 0$ liege der Kreis symmetrisch zur y-Achse, und als Punkt p sei der Ursprung gewählt. Zu einem beliebigen Zeitpunkt t gilt dann: Abgerollt wurde eine Strecke der Länge rt, also befindet sich der Mittelpunkt des Kreises an den Koordinaten $(rt, r) = r(t, 1)$. Die x-Koordinate der neuen Position von p beträgt folglich $rt - r\sin t$, die y-Koordinate lautet $r - r\cos t$. Damit ergibt sich für die Zykloide:

$$c(t) = r\begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix} \quad , \quad \dot{c}(t) = r\begin{pmatrix} 1 - \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \quad , \quad \ddot{c}(t) = r\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

Es gilt $\dot{c}(t) = 0 \iff t = 2\pi k\,,\ k \in \mathbb{Z}$. Also ist c regulär auf $\mathbb{R} \setminus \{2\pi k \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$. Weiter gilt:

$$\|\dot{c}(t)\| = r(1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t)^{\frac{1}{2}} = r\sqrt{2 - 2\cos t}$$

Um die Krümmung zu berechnen, sei an die Formel $\kappa(t) = \frac{\|(\ddot{c}(t))^\perp\|}{\|\dot{c}(t)\|^2}$ aus der Vorlesung erinnert. Da c eine ebene Kurve ist, kann $(\ddot{c}(t))^\perp$ durch Projektion von $\ddot{c}(t)$ auf $JT(t)$ berechnet werden, wobei J wie in Aufgabe 1.3 gegeben ist. Man sieht leicht, dass wir auf diese Weise sogar die Krümmung mit Vorzeichen erhalten:

$$\kappa(t) = \frac{\langle JT(t), \ddot{c}(t)\rangle}{\|\dot{c}(t)\|^2} = \frac{\langle J\dot{c}(t), \ddot{c}(t)\rangle}{\|\dot{c}(t)\|^3}$$

Einsetzen ergibt nun für die Kurve c:

$$\begin{aligned} \kappa(t) &= \frac{\left\langle r\left(\begin{smallmatrix} -\sin t \\ 1-\cos t \end{smallmatrix}\right), r\left(\begin{smallmatrix} \sin t \\ \cos t \end{smallmatrix}\right)\right\rangle}{r^3(2 - 2\cos t)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-\sin^2 t + \cos t - \cos^2 t}{r(2 - 2\cos t)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1 - \cos t}{2\sqrt{2}r(1 - \cos t)^{\frac{3}{2}}} \\ &= -\frac{1}{2r\sqrt{2 - 2\cos t}} \end{aligned}$$

Das negative Vorzeichen zeigt Rechtskrümmung; dies stimmt mit der Konstruktion von c überein.

Zu Aufgabe 1.2

Es ist

$$c(t) = r\begin{pmatrix} e^t\cos(\omega t) \\ e^t\sin(\omega t) \end{pmatrix} \quad , \quad \dot{c}(t) = r\begin{pmatrix} e^t\cos(\omega t) - e^t\omega\sin(\omega t) \\ e^t\sin(\omega t) + e^t\omega\cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

und damit:

$$\begin{aligned} \|\dot{c}(t)\| &= r\Big(e^{2t}\cos^2(\omega t) - 2e^t\cos(\omega t)\cdot e^t\sin(\omega t) + e^{2t}\omega^2\sin^2(\omega t) + \\ &\quad + e^{2t}\sin^2(\omega t) + 2e^t\sin(\omega t)\cdot e^t\omega\cos(\omega t) + e^{2t}\omega^2\cos^2(\omega t)\Big)^{\frac{1}{2}} \\ &= r(e^{2t} + e^{2t}\omega^2)^{\frac{1}{2}} = re^t\sqrt{1 + \omega^2} \end{aligned}$$

Insbesondere wird die Geschwindigkeit nie Null, also ist c regulär. Weiterhin ergibt sich:

$$L\left(c|_{[a,b]}\right) \quad = \quad \int_a^b \|\dot{c}(t)\| dt \;=\; \int_a^b re^t\sqrt{1+\omega^2}dt \;=\; r\sqrt{1+\omega^2}(e^b - e^a)$$

Wir berechnen das Einheitstangentialfeld

$$T(t) = \frac{\dot{c}(t)}{\|\dot{c}(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}\begin{pmatrix} \cos(\omega t) - \omega\sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) + \omega\cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

und seine Ableitung:

$$T'(t) = \frac{\omega}{\sqrt{1+\omega^2}}\begin{pmatrix} -\sin(\omega t) - \omega\cos(\omega t) \\ \cos(\omega t) - \omega\sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

Damit gilt für die Krümmung:

$$\begin{aligned}
\kappa(t) \quad &= \quad \frac{\|T'(t)\|}{\|\dot{c}(t)\|} \quad = \\
&= \quad \frac{\omega\sqrt{\sin^2(\omega t) + 2\omega\sin(\omega t)\cos(\omega t) + \omega^2\cos^2(\omega t) + \cos^2(\omega t) - 2\omega\sin(\omega t)\cos(\omega t) + \omega^2\sin^2(\omega t)}}{re^t(1+\omega^2)} \\
&= \quad \frac{\omega}{re^t\sqrt{1+\omega^2}}
\end{aligned}$$

Zu Aufgabe 1.3

Zunächst ergibt sich durch Ableiten:

$$\dot{m}_c(t) = \dot{c}(t) - \frac{\dot{\kappa}(t)}{(\kappa(t))^2}J\dot{c}(t) + \frac{1}{\kappa(t)}J\ddot{c}(t)$$

Da c nach Bogenlänge parametrisiert ist, gilt $N(t) = \frac{\ddot{c}(t)}{\|\ddot{c}(t)\|}$. (Zur Erinnerung: Man differenziere die Gleichung $\langle \dot{c}(t), \dot{c}(t)\rangle = 1$ um zu sehen, dass $\ddot{c}(t)$ senkrecht auf $\dot{c}(t)$ steht für alle t.) Also ist

$$\frac{1}{\kappa(t)}J\ddot{c}(t) = \frac{1}{\|\ddot{c}(t)\|}J\|\ddot{c}(t)\|N(t) = J^2\dot{c}(t) = -\dot{c}(t)$$

und somit ergibt sich

$$\dot{m}_c(t) = -\frac{\dot{\kappa}(t)}{(\kappa(t))^2}J\dot{c}(t) = -\frac{\dot{\kappa}(t)}{(\kappa(t))^2}N(t)$$

wie gewünscht.

Weiter ist $N(t)$ ein Einheitsvektor, und $\kappa(t)$ ist monoton steigend, also $\dot{\kappa}(t) \geq 0$ für alle t. Damit folgt

$$\|\dot{m}_c(t)\| = \frac{\dot{\kappa}(t)}{(\kappa(t))^2}$$

und weiter für $0 \leq a \leq b < \infty$:

$$L\left(m_c|_{[a,b]}\right) = \int_a^b \|\dot{m}_c(t)\|dt = \int_a^b \frac{\dot{\kappa}(t)}{(\kappa(t))}dt = \left[-\frac{1}{\kappa(t)}\right]_a^b = \frac{1}{\kappa(a)} - \frac{1}{\kappa(b)}$$

Daraus wiederum folgt nun:

$$\|m_c(a) - m_c(b)\| = \left\|\int_a^b \dot{m}_c(t)dt\right\| \leq \int_a^b \|\dot{m}_c(t)\|dt = \frac{1}{\kappa(a)} - \frac{1}{\kappa(b)}$$

Sind nun $0 \leq t_1 \leq t_2 < \infty$ beliebig gegeben, so gilt

$$\|m_c(t_1) - m_c(t_2)\| + \frac{1}{\kappa(t_2)} \leq \frac{1}{\kappa(t_1)},$$

also liegt der gesamte Krümmungskreis um den Krümmungsmittelpunkt $m_c(t_2)$ (mit Radius $\frac{1}{\kappa(t_2)}$) innerhalb des Krümmungskreises um den Mittelpunkt $m_c(t_1)$. Insbesondere liegt jeder Kurvenpunkt $c(t)$ für $t \geq t_1$ innerhalb des letzteren Kreises.

Da $\kappa(t)$ monoton wächst in t, fällt $\frac{1}{\kappa(t)}$ monoton und ist beschränkt. Folglich existiert der Grenzwert für $t \to \infty$ und damit auch der Wert

$$L(m_c) = \lim_{b\to\infty} L\left(c|_{[0,b]}\right) = \frac{1}{\kappa(0)} - \lim_{b\to\infty} \frac{1}{\kappa(b)}.$$

Die gesamte Kurve m_c liegt innerhalb eines Kreises vom Radius $L(m_c)$, also innerhalb einer kompakten Menge. Ist (t_i) irgendeine streng monoton gegen ∞ divergente Folge, so hat die Folge $m_c(t_i)$ eine konvergente Teilfolge. Ihr Grenzwert muss der einzige Häufungspunkt der Folge $m_c(t_i)$ sein, denn sonst wäre $L(m_c)$ nicht endlich. Ebenso ergibt sich derselbe Grenzwert für jede Wahl der Folge t_i. Also existiert der Grenzwert $\lim_{t\to\infty} m_c(t) =: m_{c\,\infty}$.

Für jedes $t > 0$ gilt

$$\|m_c(t) - c(t)\| = \frac{1}{\kappa(t)}$$

und dieser Ausdruck konvergiert für $t \to \infty$. Folglich konvergiert $\|m_{c\,\infty} - c(t)\|$ gegen denselben Grenzwert, nämlich gegen den Grenzwert der Radien der Krümmungskreise.