Prof. Dr. B. Wilking
Dr. A. Wörner

WiSe 2011/12

10. Musterlösung zur Differentialgeometrie 1

Zu Aufgabe 10.1

Wir zeigen zunächst: Für $X\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ und $\varphi \in C^\infty([a,b],\mathbb{R})$ gilt

$$\frac{\nabla \varphi X}{dt} = \varphi' X + \varphi \frac{\nabla X}{dt}.$$

Dies ist recht einfach:

$$\begin{aligned}\frac{\nabla \varphi X}{dt} &= \frac{d\varphi X}{dt} + \Gamma(\dot c, \varphi X)\\ &= \varphi' X + \varphi \frac{dX}{dt} + \varphi \Gamma(\dot c, X)\\ &= \varphi' X + \varphi \frac{\nabla X}{dt}\end{aligned}$$

Nun überlegt man sich durch eine einfache Rechnung, dass $A(X,Y) = \frac{d}{dt} g(X,Y) - g(\frac{\nabla X}{dt}, Y) - g(X, \frac{\nabla Y}{dt})$ ein Tensor ist. Da sich jedes Vektorfeld längs c als $C^\infty([a,b],\mathbb{R})$–Linearkombination der konstanten Basisvektorfelder längs c schreiben lässt, genügt es, die Behauptung für die konstanten Basisvektorfelder zu zeigen.
Wir setzen $v = \dot c(t)$, und $g(e_i, e_j)$ bezeichne wie üblich die durch $p \mapsto g_p(e_i, e_j)$ auf U erkärte Funktion. Weiter sei $V : U \to \mathbb{R}^n$ das Vektorfeld, welches konstant gleich v ist. Dann ist

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} g_{c(t)}(e_i, e_j) &= (V g(e_i, e_j))(c(t))\\ &= g_{c(t)}((\nabla_V e_i)_{c(t)}, e_j) + g_{c(t)}(e_i, (\nabla_V e_j)_{c(t)}).\end{aligned}$$

Nun folgt wegen

$$\frac{\nabla e_i}{dt} = \frac{\nabla e_i}{dt} + \underbrace{\frac{De_i}{dt}}_{=0} = \Gamma_{c(t)}(\dot c(t), e_i) = \Gamma_{c(t)}(V, e_i) = (\nabla_V e_i)_{c(t)} - \underbrace{(D_V e_i)_{c(t)}}_{=0} = (\nabla_V e_i)_{c(t)}$$

die Behauptung.

Zu Aufgabe 10.2

Zu (i) Es gilt nach Aufgabe 10.1:

$$\frac{d}{dt} g_c(X,Y) = g\Big(\frac{\nabla X}{dt}, Y\Big) + g\Big(X, \frac{\nabla Y}{dt}\Big) = 0 + 0$$

und daher folgt die Behauptung.

Zu (ii) Da nach (i) die Vektoren $X_1(t), \ldots, X_n(t)$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$ bezüglich $g_{c(t)}$ bilden ($t \in [a,b]$), folgt

$$Z(t) = \sum_{i=1}^n g_{c(t)}(Z(t), X_i(t)) X_i(t) = \sum_{i=1}^n \theta_i(t) X_i(t).$$

Nutzen wir die zu Beginn von Aufgabe 10.1 bewiesene Ableitungregel aus, so folgt:

$$\frac{\nabla Z}{dt}(t) \;=\; \sum_{i=1}^{n} \frac{\nabla \theta_i X_i}{dt}(t) \;=\; \sum_{i=1}^{n} \theta_i'(t) X_i(t) + \theta_i(t) \frac{\nabla X_i}{dt}(t) \;=\; \sum_{i=1}^{n} \theta_i'(t) X_i(t)$$

Zu Aufgabe 10.3

Wir benutzen die Levi–Civita-Gleichung in der folgenden Rechnung:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_i} g_{j\ell} &= \frac{\partial}{\partial x_i} g\left(\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_\ell}\right) = g\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_\ell}\right) + g\left(\frac{\partial}{\partial x_j}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_\ell}\right) \\
&= g\left(\sum_{m=1}^{n} \Gamma_{ij}^m \frac{\partial}{\partial x_m}, \frac{\partial}{\partial x_\ell}\right) + \left(\frac{\partial}{\partial x_j}, \sum_{m=1}^{n} \Gamma_{ij}^m \frac{\partial}{\partial x_m}\right) \\
&= \sum_{m=1}^{n} \Gamma_{ij}^m g_{m\ell} + \sum_{m=1}^{n} \Gamma_{ij}^m g_{jm}
\end{aligned}$$

Ganz analog ergibt sich auch folgendes:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_j} g_{i\ell} &= \sum_{m=1}^{n} \Gamma_{ji}^m g_{m\ell} + \sum_{m=1}^{n} \Gamma_{j\ell}^m g_{im} \\
\frac{\partial}{\partial x_\ell} g_{ij} &= \sum_{m=1}^{n} \Gamma_{\ell i}^m g_{mj} + \sum_{m=1}^{n} \Gamma_{\ell j}^m g_{im}
\end{aligned}$$

Berücksichtigen wir nun die Symmetrien $g_{ab} = g_{ba}$ und $\Gamma_{ab}^c = \Gamma_{ba}^c$, so folgt daraus

$$\frac{\partial}{\partial x_i} g_{j\ell} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{i\ell} - \frac{\partial}{\partial x_\ell} g_{ij} \;=\; 2 \sum_{m=1}^{n} \Gamma_{ij}^m g_{m\ell}$$

und somit schlussendlich:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^{n} g^{k\ell} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} g_{j\ell} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{i\ell} - \frac{\partial}{\partial x_\ell} g_{ij}\right) &= \sum_{\ell=1}^{n} g^{k\ell} \sum_{m=1}^{n} \Gamma_{ij}^m g_{m\ell} \\
&= \sum_{\ell=1}^{n} g^{k\ell} \left(\Gamma_{ij}^k g_{\ell m} + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{n} \Gamma_{ij}^m g_{\ell m}\right) \;=\; \Gamma_{ij}^k
\end{aligned}$$

Zu Aufgabe 10.4

Zu (i) Die Existenz und Eindeutigkeit von $\operatorname{grad} \psi$ folgen sofort aus der Tatsache, dass jede 1-Form auf M über die Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle$ eindeutig zu einem Vektorfeld korrespondiert.

Zu (ii) Man prüft leicht nach, dass die rechte Seite der ersten Gleichung einen linearen Zusammenhang definiert. Wir wollen diesen Zusammenhang zunächst $\bar{\nabla}$ nennen. Wir haben zu verifizieren, dass $\bar{\nabla}$ torsionsfrei ist und $(\bar{\nabla} \tilde{g}) = 0$ gilt. Die Behauptung folgt dann aus der Eindeutigkeit des Levi–Civita-Zusammenhangs.

Es seien X, Y, Z Vektorfelder mit paarweise verschwindender Lieklammer. Es gilt dann

$$\bar{\nabla}_X Y - \bar{\nabla}_Y X = 0$$

und somit ist $\bar{\nabla}$ torsionsfrei. Ferner gilt in der Tat:

$$\begin{aligned}
(\bar{\nabla}_X \tilde{g})(Y,Z) &= X e^{\psi} g(Y,Z) - e^{\psi} g(\bar{\nabla}_X Y, Z) - e^{\psi} g(Y, \bar{\nabla}_X Z) \\
&= e^{\psi}\left((X\psi) g(Y,Z) + X g(Y,Z) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z)\right) \\
&\quad -\frac{e^{\psi}}{2}\left(g\left((X\psi)Y + (Y\psi)X - g(X,Y)\operatorname{grad}\psi, Z\right)\right) \\
&\quad -\frac{e^{\psi}}{2}\left(g\left(Y, (X\psi)Z + (Z\psi)X - g(X,Z)\operatorname{grad}\psi\right)\right) \\
&= -\frac{e^{\psi}}{2}\left((Y\psi) g(X,Z) - g(X,Y) Z\psi + (Z\psi) g(X,Y) - g(X,Z) Y\psi\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$