Prof. Dr. B. Wilking
Dr. A. Wörner WiSe 2011/12

11. Musterlösung zur Differentialgeometrie 1

Zu Aufgabe 11.1

Bemerkung: Es ist sinnvoller, bei der Definition der Holonomie Kurven zuzulassen, die nur stückweise C^∞ sind. Dies ergibt zwar keine neue Theorie, da sich Kurven passend glätten lassen, vereinfacht jedoch die Argumente. Im folgenden lassen wir daher Kurven zu, die stückweise C^∞ sind.

Zu (i) Wir überlegen uns zunächst $\mathrm{Hol}_p \subseteq O(n)$. Dazu sei $c\colon [a,b]$ eine geschlossene C^∞-Kurve an p, und V, W seien parallele Vektorfelder längs c. Dann gilt

$$\frac{d}{dt} g_{c(t)}(V(t), W(t)) = g_{c(t)}\left(\frac{\nabla V}{dt}, W(t)\right) + g_{c(t)}\left(V(t), \frac{\nabla W}{dt}\right) = 0 + 0 = 0$$

und somit ist $g(V, W)$ konstant längs c. Damit ist $\mathrm{Hol}_p \subseteq O(n)$ gezeigt. Sind nun $\varphi, \psi \in \mathrm{Hol}_p$, so erhält man $\varphi \circ \psi \in \mathrm{Hol}_p$ durch Aneinanderhängen der zugehörigen Kurven und $\varphi^{-1} \in \mathrm{Hol}_p$ durch Umkehrung der Durchlaufsrichtung der zugehörigen Kurve. Damit ist Hol_p eine Untergruppe der $O(n)$.

Zu (ii) Zunächst ist die Holonomiegruppe aufgrund der Symmetrie der $\mathbb{S}^n$ unabhängig vom Punkt p. Da die $\mathbb{S}^n$ orientierbar ist, muss offensichtlich $\mathrm{Hol}_p \subseteq SO(n)$ gelten. In der Tat gilt Gleichheit, was im Fall $n = 2$ leicht einzusehen ist: Ist etwa p der Nordpol, so transportiere man entlang von Längenkreisen und des Äquators. Für $n > 2$ führt man dasselbe auf einer passenden eingebetteten $\mathbb{S}^2$ aus.

Zu Aufgabe 11.2

Zu (i) Es seien $X = (X_M, X_N), Y = (Y_M, Y_N)$ Vektorfelder auf $K = M \times N$. Weiter sei ∇^g der Levi–Civita-Zusammenhang auf (M, g) und ∇^h derjenige auf (N, h). Da K die Produktmetrik trägt, ist sofort klar, dass gilt:

$$\nabla_X Y = \nabla^g_{X_M} Y_M + \nabla^h_{X_N} Y_N$$

Zu (ii) Es sei $c = (c_M, c_N)$ eine Kurve in $K = M \times N$. Dann folgt mit den Ergebnissen aus (i):

$$\nabla_{\dot c} \dot c \equiv 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \nabla^g_{\dot c_M} \dot c_M + \nabla^h_{\dot c_N} \dot c_N \equiv 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \nabla^g_{\dot c_M} \dot c_M \equiv 0 \text{ und } \nabla^h_{\dot c_N} \dot c_N \equiv 0$$

Damit ist c genau dann eine Geodätische in K, wenn c_M, c_N Geodätische in M bzw. N sind.

Zu (iii) Es seien $X = (X_M, X_N), Y = (Y_M, Y_N), Z = (Z_M, Z_N)$ Vektorfelder in $K = M \times N$. Weiter sei R der Krümmungstensor von K und R^g, R^h die Krümmungstensoren von M bzw. N. Dann zeigt wiederum eine einfache Rechnung, dass gilt:

$$R_{X,Y} Z = R^g_{X_M, Y_M} Z_M + R^h_{X_N, Y_N} Z_N$$

Zu Aufgabe 11.3

Zu (i) Es ist einfach nachzurechnen, dass durch $(D_{\bar{X}}\bar{Y})^T$ ein Zusammenhang definiert ist, da die Projektion eine lineare Abbildung ist. Nun ist die Levi–Civita-Gleichung nachzurechnen. Dazu seien $X = \bar{X}|_M, Y = \bar{Y}|_M$ und $Z = \bar{Z}|_M$ Vektorfelder auf M. Es gilt

$$2g(\nabla_X Y, Z) = 2\langle (D_{\bar{X}}\bar{Y})^T, \bar{Z}\rangle = 2\langle D_{\bar{X}}\bar{Y}, \bar{Z}\rangle$$

und dieser Ausdruck erfüllt nach Voraussetzung die Levi–Civita-Gleichung.

Zu (ii) Es ist $c''(t) = \cosh(t)p + \sinh(t)v = c(t)$. Außerdem gilt $T_{c(t)} = (c(t))^\perp$ und somit trivialerweise auch $c''(t) \perp T_{c(t)}$. Also ist

$$\nabla_{c'(t)}c'(t) = (D_{c'(t)}c'(t))^T = (c''(t))^T = 0$$

und somit c eine Geodätische.