Prof. Dr. B. Wilking WiSe 2011/12
Dr. A. Wörner

12. Musterlösung zur Differentialgeometrie 1

Zu Aufgabe 12.1

Es gilt $L(c_s) = \int_a^b |c_s'(t)| dt$. Weiter ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial s}|c_s'(t)|\Big|_{s=0} &= \frac{\partial}{\partial s}\sqrt{\langle c_s'(t), c_s'(t)\rangle}\Big|_{s=0} \\
&= \frac{1}{|c'(t)|}\left\langle \frac{\partial}{\partial s}c_s'(t)\Big|_{s=0}, c'(t)\right\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial s}c_s'(t)\Big|_{s=0}, c'(t)\right\rangle \\
&= \frac{d}{dt}\left\langle \frac{\partial}{\partial s}c_s(t)\Big|_{s=0}, c'(t)\right\rangle - \left\langle \frac{\partial}{\partial s}c_s(t)\Big|_{s=0}, c''(t)\right\rangle \\
&= \frac{d}{dt}\langle S(t), c'(t)\rangle - \langle S(t), c''(t)\rangle
\end{aligned}$$

Da das Variationsfeld eine C^∞-Abbildung in (s,t) ist, können Differentiation und Integration vertauscht werden. Damit folgt wie gewünscht:

$$\frac{d}{ds}L(c_s)\Big|_{s=0} = \int_a^b \frac{\partial}{\partial s}|c_s'(t)|\Big|_{s=0} dt = \langle S(t), c'(t)\rangle\,\Big|_a^b - \int_a^b \langle S(t), c''(t)\rangle\, dt$$

Zu Aufgabe 12.2

Zum Beweis der Konvergenz kann jede Matrixnorm verwendet werden. Nehmen wir die Maximumnorm $\|A\| = \max|a_{ij}|$, so gilt $\|A^k\| \le n^{k-1}\|A\|^k$ für $k \in \mathbb{N}$. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
\|\exp(A)\| &= \left\|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!}\right\| \le \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\|A^k\|}{k!} \le 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{n^{k-1}\|A\|^k}{k!} \le 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(n\|A\|)^k}{k!} \\
&= e^{n\|A\|}
\end{aligned}$$

und somit ist die Reihe konvergent.

Zu (ii) Es sei $A \in SO(n)$ fest gewählt und $\varphi\colon X \mapsto AX$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\langle\varphi(X), \varphi(Y)\rangle &= \langle AX, AY\rangle = \operatorname{tr}((AX)(AY)^t) = \operatorname{tr}((AX)(Y^tA^t)) \\
&= \operatorname{tr}(Y^tA^tAX) = \operatorname{tr}(Y^tX) = \operatorname{tr}(XY^t) \\
&= \langle X, Y\rangle
\end{aligned}$$

und somit ist φ eine Isometrie.

Zu (iii) Es sei $X \in T_E SO(n)$, also $X^t = -X$. Weiter sei, wie angegeben, $c_X(t) = \exp(tX)$. Direkt aus der Definition von exp rechnet man nach, dass Differentiation nach den gewohnten Regeln funktioniert. Damit folgt:

$$\begin{aligned}
c_X'(t) &= \exp(tX)\cdot X \\
c_X''(t) &= \exp(tX)\cdot X^2
\end{aligned}$$

Nun sei $Y \in T_{c_X(t)}SO(n)$, also $Y = c_X(t)Z$ mit $Z \in T_E SO(n)$, also $Z^t = -Z$. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned}\langle c_X''(t), Y\rangle &= \langle \exp(tX)\cdot X^2, \exp(tX)\cdot Z\rangle \;=\; \mathrm{tr}\big((\exp(tX)\cdot X^2)(\exp(tX)\cdot Z)^t\big)\\ &= \mathrm{tr}\big(Z^t(\exp(tX))^t\exp(tX)X^2\big)\end{aligned}$$

Dabei ist

$$(\exp(tX))^t = \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(tX)^k}{k!}\right)^t = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(tX^t)^k}{k!} = \exp(tX^t) = \exp(-tX)$$

und somit:

$$(\exp(tX))^t\exp(tX) = \exp(-tX)\exp(tX) = \exp(-tX+tX) = \exp(0) = E$$

Wir führen nun die obige Rechnung fort:

$$\begin{aligned}\langle c_X''(t), Y\rangle &= \mathrm{tr}(Z^tX^2) \;=\; \mathrm{tr}(-ZX^2) \;=\; -\mathrm{tr}(ZX^2) \;=\; -\mathrm{tr}(ZXX)\\ &= -\mathrm{tr}(X^tX^tZ^t) \;=\; -\mathrm{tr}((-X)(-X)(-Z)) \;=\; \mathrm{tr}(X^2Z)\\ &= \mathrm{tr}(ZX^2)\end{aligned}$$

Wegen $-\mathrm{tr}(ZX^2) = \mathrm{tr}(ZX^2)$ ist $\langle c_X''(t), Y\rangle = 0$. Also hat die 2. Ableitung der Kurve c_X nur einen Anteil normal zur Untermannigfaltigkeit $SO(n)$ in $GL(n,\mathbb{R})$ und somit verschwindende 2. kovariante Ableitung. Folglich ist c_X eine Geodätische. Wegen $c_X'(0) = X$ und der Eindeutigkeit von Geodätischen sind umgekehrt auch alle Geodätische durch E von dieser Form.

Zu Aufgabe 12.3

Zu (i) Es gilt

$$\begin{aligned}X(Y\psi) &= \nabla_X(Y\psi) \;=\; \nabla_X g(\mathrm{grad}\,\psi, Y) \;=\; g(\nabla_X\mathrm{grad}\,\psi, Y) + g(\mathrm{grad}\,\psi, \nabla_X Y)\\ &= g(\nabla_X\mathrm{grad}\,\psi, Y) + (\nabla_X Y)\psi\end{aligned}$$

und somit

$$g(\nabla_X\mathrm{grad}\,\psi, Y) = X(Y\psi) - (\nabla_X Y)\psi.$$

Analog ist

$$g(\nabla_Y\mathrm{grad}\,\psi, X) = Y(X\psi) - (\nabla_Y X)\psi$$

und folglich

$$\begin{aligned}g(\nabla_X\mathrm{grad}\,\psi, Y) - g(\nabla_Y\mathrm{grad}\,\psi, X) &= X(Y\psi) - Y(X\psi) - \big((\nabla_X Y) - (\nabla_Y X)\big)\psi\\ &= [X,Y]\psi - [X,Y]\psi \;=\; 0\end{aligned}$$

aufgrund der Torsionsfreiheit. Dies zeigt, dass h_ψ symmetrisch ist.

Zu (ii) Für die Gleichung machen wir folgende Vorüberlegung:
Mit etwas Aufwand kann man zeigen, dass sich die rechte Seite der Gleichung nicht ändert, wenn y durch $y + \lambda x$ ersetzt wird. Da das gleiche für die linke Seite gilt, können wir ohne Einschränkung $g(x,y) = 0$ annehmen. Nachdem wir noch ohne Einschränkung umskaliert haben, bleibt zu zeigen:
Gilt $g(x,y) = 0$ und $g(x,x) = g(y,y) = 1$, so ist

$$\begin{aligned}g(\tilde{R}(x,y)y,x) &= R(x,y)y,x) - \frac{1}{2}\left(h_\psi(x,x) + h_\psi(y,y)\right)\\ &\quad -\frac{1}{4}\left(\|\mathrm{grad}\,\psi\|_g^2 - (y\psi)^2 - (x\psi)^2\right)\end{aligned}$$

Wir wählen Vektorfelder X, Y mit $X_p = x$, $Y_p = y$ und $[X,Y] = 0$. Darüberhinaus können wir ohne Einschränkung verlangen, dass $\nabla_x Y = \nabla_x X = \nabla_y Y = \nabla_y X = 0$ gilt (fast normale

Koordinaten). In diesen Koordinaten gilt $(x(X\psi)) = xg(X, \operatorname{grad}\psi) = h_\psi(x,x)$ und analog $x(Y\psi) = h_\psi(x,y)$, $y(Y\psi) = h_\psi(y,y)$. Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}
& g(\tilde{R}(x,y)y,x) \\
= \; & g\left(\tilde{\nabla}_x\Big(\nabla_Y Y + (Y\psi)Y - \frac{1}{2}g(Y,Y)\operatorname{grad}\psi\Big), x\right) \\
& -g\left(\tilde{\nabla}_y\left(\nabla_X Y + \frac{1}{2}\Big((X\psi)Y + (Y\psi)X - g(X,Y)\operatorname{grad}\psi\Big)\right), x\right) \\
= \; & \underbrace{g(\tilde{\nabla}_x\nabla_Y Y, x) - g(\tilde{\nabla}_y\nabla_X Y, x)}_{=g(R(x,y)y,x)} \\
& +(y\psi)g(\tilde{\nabla}_x Y, x) - \frac{1}{2}\Big(\underbrace{xg(Y,Y)}_{=0}g(\operatorname{grad}\psi, x) + g(\tilde{\nabla}_x\operatorname{grad}\psi, x)\Big) \\
& -\frac{1}{2}\Big((x\psi)g(\tilde{\nabla}_y Y, x) + (y(Y\psi)) + (y\psi)g(\tilde{\nabla}_y X, x) - 0(\underbrace{yg(X,Y)}_{=0})g(\operatorname{grad}\psi, x)\Big) \\
= \; & g(R(x,y)y,x) + (y\psi)g(\tilde{\nabla}_x Y, x) - \frac{1}{2}g(\tilde{\nabla}_x\operatorname{grad}\psi, x) \\
& -\frac{1}{2}\left((x\psi)g(\tilde{\nabla}_y Y, x) + h_\psi(y,y) + (y\psi)g(\tilde{\nabla}_y X, x)\right) \\
= \; & g(R(x,y)y,x) + \frac{1}{2}(y\psi)^2 - \frac{1}{2}h_\psi(x,x) - \frac{1}{4}\left((\operatorname{grad}\psi\psi) + (x\psi)^2 - (x\psi)^2\right) \\
& -\frac{1}{4}\left(-(x\psi)^2 + 2h_\psi(y,y) + (y\psi)^2\right) \\
= \; & g(R(x,y)y,x) - \frac{1}{2}\left(h_\psi(x,x) + h_\psi(y,y)\right) \\
& -\frac{1}{4}\left(\|\operatorname{grad}\psi\|_g^2 - (x\psi)^2 - (y\psi)^2\right)
\end{aligned}$$

Zu Aufgabe 12.4

Wird nachgereicht wegen momentaner Erkrankung.