Prof. Dr. B. Wilking
Dr. A. Wörner WiSe 2011/12

# 2. Musterlösung zur Differentialgeometrie 1

## Zu Aufgabe 2.1

Es sei $p_1 \in \mathbb{S}^n$ beliebig gewählt. Dann kann man für jedes $\delta > 0$ Punkte $p_2, \ldots, p_{n+1} \in \mathbb{S}^n$ derart wählen, dass $p_1, \ldots, p_{n+1}$ linear unabhängig sind (aufgefasst als Elemente von $\mathbb{R}^{n+1}$) und dass $d(p_1, p_i) < \delta$ gilt für alle $i = 2, \ldots, n+1$. Nun bezeichnen $q_1, \ldots, q_{n+1}$ die jeweiligen antipodalen Punkte zu $p_1, \ldots, p_{n+1}$. Dann gibt es keinen abgeschlossenen Halbraum, der alle Punkte $p_1, \ldots, p_{n+1}, q_1, \ldots, q_{n+1}$ enthält, denn die Punkte $p_1, \ldots, p_n$ bestimmen bereits eindeutig eine Hyperebene. Diese definiert zwei Halbräume, von denen nur einer den Punkt $p_{n+1}$ enthält und nur der andere den Punkt $q_{n+1}$.

Wählt man nun die Kurve $c$ derart, dass sie durch alle Punkte $p_1, \ldots, p_{n+1}, q_1, \ldots, q_{n+1}$ geht, gibt es keinen abgeschlossenen Halbraum, der die Kurve enthält. Dabei kann man $L(c) = 2\pi + \varepsilon$ erreichen, wenn man anfangs das $\delta$ klein genug wählt. Man kann zum Beispiel $\delta = \frac{\varepsilon}{5n}$ wählen, denn es ist

$$\begin{aligned}
& d(p_1,p_2) + \ldots + d(p_n, p_{n+1}) + d(p_{n+1}, q_{n+1}) + d(q_{n+1}, q_n) + \ldots d(q_2, q_1) + d(q_1, p_1) \\
\leq\ & \underbrace{2\delta + \ldots + 2\delta}_{n \text{ mal}} + \pi + \underbrace{2\delta + \ldots + 2\delta}_{n \text{ mal}} + \pi \\
=\ & 2\pi + 4n\delta \ = \ 2\pi + \frac{4}{5}\varepsilon.
\end{aligned}$$

Da die Kurve $c$ um $\frac{1}{5}\varepsilon$ länger sein darf, können etwaige Knicke noch geglättet werden, sodass $c$ differenzierbar geschlossen ist.

## Zu Aufgabe 2.2

Wir setzen $f(t) := \langle \dot c(t), c(t)\rangle = \|\dot c(t)\| \cdot \|c(t)\| \cdot \cos\measuredangle(\dot c(t), c(t))$. Aufgrund der Voraussetzungen gilt damit $f(t) \in [-R, R]$ für alle $t \in [0, L]$.

Zu (i) Aus der Vorüberlegung folgt direkt

$$\begin{aligned}
2R \ \geq\ f(L) - f(0) \quad &= \quad \int_0^L f'(t)dt \ = \ \int_0^L \big(\langle \ddot c(t), c(t)\rangle + \langle \dot c(t), \dot c(t)\rangle\big)dt \\
&= \quad \int_0^L \langle \ddot c(t), c(t)\rangle dt + \int_0^L dt \\
&= \quad \int_0^L \|\ddot c(t)\| \cdot \|c(t)\| \cdot \cos\measuredangle(\ddot c(t), c(t))dt + L
\end{aligned}$$

und daher

$$L - 2R \leq -\int_0^L \|\ddot c(t)\| \cdot \|c(t)\| \cdot \cos\measuredangle(\ddot c(t), c(t))dt \leq R\int_0^L \kappa_c(t)dt$$

woraus die Behauptung

$$\frac{L}{R} - 2 \leq \int_0^L \kappa_c(t)dt$$

folgt.

Zu (ii) Nun sei $c$ differenzierbar geschlossen. Also gilt $f(L) = f(0)$ und somit

$$0 = f(L) - f(0) \; = \; \int_0^L f'(t)dt = \int_0^L \|\ddot{c}(t)\| \cdot \|c(t)\| \cdot \cos\measuredangle(\ddot{c}(t), c(t))dt + L.$$

Daraus folgt

$$L = -\int_0^L \|\ddot{c}(t)\| \cdot \|c(t)\| \cdot \cos\measuredangle(\ddot{c}(t), c(t))dt \leq R \int_0^L \kappa_c(t)dt$$

und somit die Behauptung

$$\frac{L}{R} \leq \int_0^L \kappa_c(t)dt.$$

## Zu Aufgabe 2.3

Nach den Bedingungen hat die Funktion $t \mapsto \|c(t)\|$ bei $t = t_0$ ein Maximum. Dasselbe gilt für die Funktion $t \mapsto \|c(t)\|^2 = \langle c(t), c(t)\rangle$, die einfacher zu differenzieren ist. Es folgt einerseits die Bedingung

$$0 = \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} \langle c(t), c(t)\rangle = 2\langle \dot{c}(t_0), c(t_0)\rangle$$

und andererseits, da es sich um ein Maximum handelt:

$$0 \geq \frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=t_0} \langle c(t), c(t) = 2\langle \ddot{c}(t_0), c(t_0)\rangle + 2\langle \dot{c}(t_0), \dot{c}(t_0)\rangle$$

Dabei ist $\langle \dot{c}(t_0), \dot{c}(t_0)\rangle = 1$, da $c$ wegparametrisiert ist. Dies ergibt

$$-1 \geq \langle \ddot{c}(t_0), c(t_0)\rangle = \|\ddot{c}(t_0)\| \cdot \|c(t_0)\| \cdot \cos\measuredangle(\ddot{c}(t_0), c(t_0)),$$

also insbesondere $\cos\measuredangle(\ddot{c}(t_0), c(t_0)) < 0$. Damit folgt weiter

$$\|\ddot{c}(t_0)\| \geq \frac{-1}{\|c(t_0)\| \cdot \cos\measuredangle(\ddot{c}(t_0), c(t_0))} \geq \frac{1}{R}$$

und somit die Behauptung, da $c$ wegparametrisiert ist und deswegen $\kappa_c(t) = \|\ddot{c}(t)\|$ gilt.

## Zu Aufgabe 2.4

Da die Krümmung invariant ist unter Umparametrisierung, können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $c$ wegparametrisiert ist. Die Evolute ist gegeben durch (vergleiche Aufgabe 1.3)

$$m_c(t) = c(t) + \frac{1}{\kappa_c(t)} J\dot{c}(t)$$

und ihre Ableitung durch

$$m_c'(t) = -\frac{\dot{\kappa}_c(t)}{(\kappa_c(t))^2} J\dot{c}(t). \qquad (*)$$

Da nach Voraussetzung $c$ eine $C^4$-Kurve ist, ist $\kappa_c$ eine $C^2$-Funktion. Sie nehme bei $t_0 \in I$ ein isoliertes Extremum an. Dann gilt $\dot{\kappa}_c(t_0) = 0$ und es existiert ein $\delta > 0$ mit $\dot{\kappa}_c(t) \neq 0$ für $t \in [t_0 - \delta, t_0) \cup (t_0, t_0 + \delta]$. Da $\kappa_c$ nach Voraussetzung nirgends verschwindet, folgt die erste Behauptung direkt aus $(*)$.

Weiter ist $J\dot{c}$ ein Einheitsvektor, und somit gilt für $t \in [t_0 - \delta, t_0) \cup (t_0, t_0 + \delta]$:

$$\frac{m_c'(t)}{\|m_c'(t)\|} = -\frac{\dot{\kappa}_c(t)}{|\dot{\kappa}_c(t)|} J\dot{c}(t) = -\mathrm{sign}(\dot{\kappa}_c(t)) J\dot{c}(t)$$

Da $\dot{\kappa}_c$ genau bei $t_0 \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ das Vorzeichen wechselt, folgt direkt die zweite Behauptung.