Prof. Dr. B. Wilking
Dr. A. Wörner WiSe 2011/12

3. Musterlösung zur Differentialgeometrie 1

Zu Aufgabe 3.1

Für einen festen Wert $a \in \mathbb{R}$ setzen wir $C_a := \{(x_1, \dots, x_n) \in C \mid x_1 = a\}$. Dann ist C_a konvex, denn sind $p = (a, p_2, \dots, p_n)$, $q = (a, q_2, \dots, q_n) \in C_a$ und $t \in [0, 1]$, so ist

$$\begin{aligned} tp + (1-t)q &= (ta, tp_2, \dots, tp_n) + ((1-t)a, (1-t)q_2, \dots, (1-t)q_n) \\ &= (a, tp_2 + (1-t)q_2, \dots, tp_n + (1-t)q_n) \quad \in \ C_a. \end{aligned}$$

Analog sieht man, dass C_a abgeschlossen ist. Nun sei $b \in \mathbb{R}$, und wir wollen zeigen, dass $(a, z_2, \dots, z_n) \in C_a$ impliziert $(b, z_2, \dots, z_n) \in C_b$. Ohne Einschränkung nehmen wir $a = 0$ und $b > 0$ an; dies kann durch Verschieben und Spiegeln von C stets erreicht werden. Für $t > b$ sei $x_t = te_1 = (t, 0, \dots, 0)$. Da C die x_1-Achse enthält, ist $x_t \in C$ für alle t. Da C konvex ist, ist die Verbindungsstrecke zwischen $(0, z_2, \dots, z_n)$ und jedem x_t in C enthalten. Der Schnittpunkt dieser Strecke mit der Hyperebene $\{b\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ ist gegeben durch $\left(b, z_2\frac{t-b}{t}, \dots, z_n\frac{t-b}{t}\right) \in C_b$. Da C_b abgeschlossen ist, gilt auch

$$(b, z_2, \dots, z_n) = \lim_{t\to\infty} \left(b, z_2\frac{t-b}{t}, \dots, z_n\frac{t-b}{t}\right) \in C_b$$

wie zu zeigen war.

Dies gilt für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$. Setzen wir daher $C' := \{(x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \mid (0, x_2, \dots, x_n) \in C_0\}$, so gilt $C = \mathbb{R} \times C'$. Dabei ist C' abgeschlossen und konvex, da C_0 dies ist.

Zu Aufgabe 3.2

Zu (i) Wir nehmen an, dass (M, d_M) ein innerer metrischer Raum ist. Es seien $p, q \in M$. Die Verbindungsstrecke zwischen p und q im $\mathbb{R}^n$ sei mit pq bezeichnet. Zu zeigen ist, dass jedes $z \in pq$ in M enthalten ist. Dabei ist bekannt, dass im $\mathbb{R}^n$ gilt: $d(p, q) = |pq|$, wobei $|pq|$ die Länge der Strecke bezeichnet. Überdies ist pq eindeutig.

Wir wählen ein $z \in pq$ und nehmen $z \notin M$ an. Wir nehmen weiter an, dass es ein $\varrho > 0$ gibt, so dass kein Punkt der offenen Kugel $B_\varrho(z)$ in M liegt. Dann gibt es offensichtlich ein $\varepsilon > 0$ derart, dass jede Kurve von p nach q in M mindestens $|pq| + \varepsilon$ lang ist. Damit wäre aber auch $d_M(p, q) \geq d(p, q) + \varepsilon$, im Widerspruch zur Voraussetzung, dass (M, d_M) mit der induzierten Metrik ein innerer metrischer Raum ist.

Also gibt es ein solches $\varrho > 0$ nicht, mit anderen Worten: In jeder Umgebung von z findet man Punkte aus M. Da M abgeschlossen ist, folgt somit auch $z \in M$.

Zu (ii) Es sei $M := \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Dann ist M nicht konvex, aber trotzdem mit der induzierten Metrik ein innerer metrischer Raum. Dazu seien $p, q \in M$ gegeben. Gilt $0 \notin pq$, so ist nichts zu zeigen. Im anderen Fall findet man für jedes $\varepsilon > 0$ einen Weg von p nach q der Länge $\leq |pq| + \varepsilon$. Damit ist $d_M(p, q) = |pq| = d(p, q)$ und also M inner metrisch.

Zu Aufgabe 3.3

Zu (i) Dies folgt direkt nach Definition von $L(c)$, denn $a \leq b$ ist eine triviale Unterteilung des Intervalls $[a, b]$.

Zu (ii) Es sei $s \in [a,b]$ fest gewählt. Bei der Definition von $L(c)$ wird das Supremum über Polygonzüge zu allen endlichen Unterteilungen des Intervalls $[a,b]$ genommen. Aufgrund der Dreiecksungleichung wird solch ein Polgonzug nicht kürzer, wenn ein zusätzlicher Unterteilungspunkt eingefügt wird. Daraus folgt, dass man denselben Wert für $L(c)$ erhält, wenn nur solche Intervallunterteilungen betrachtet werden, die s enthalten. Da c rektifizierbar ist, ist das Supremum endlich, also auch das Supremum über die Teilintervalle $[a,s]$ und $[s,b]$. Insbesondere sind die Teilkurven $c|_{[a,s]}$ und $c|_{[s,b]}$ rektifizierbar, und es gilt $L(c) = L(c|_{[a,s]}) + L(c|_{[s,b]})$.

Zu (iii) Da Metriken nichtnegativ sind, ist die Bogenlänge ebenfalls nichtnegativ. Sind nun $a \leq t_1 \leq t_2 \leq b$ gegeben, so gilt nach (ii)

$$L(c|_{[a,t_2]}) = L(c|_{[a,t_1]}) + L(c|_{[t_1,t_2]}) \geq L(c|_{[a,t_1]})$$

und damit ist die Funktion $t \mapsto L(c|_{[a,t]})$ monoton wachsend.

Zu (iv) Es sei $t_0 \in (a,b]$ gegeben. Wir zeigen die Stetigkeit von links an der Stelle t_0; die rechtsseitige beweist man analog. Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wegen der Monotonie aus (iii) genügt es zu zeigen: Es existiert ein $s \in [a,t_0)$ derart, dass $L(c|_{[a,t_0]}) - L(c|_{[a,s]}) < \varepsilon$ gilt.

Da $L(c)$ als Supremum definiert ist, gibt es eine Intervallunterteilung $a = s_0 \leq s_1 \leq \ldots \leq s_{k+1} = b$ derart, dass gilt:

$$L(c) - \sum_{i=0}^{k} d(c(s_i), c(s_{i+1})) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass t_0 ein Unterteilungspunkt ist, also $t_0 = s_{j+1}$ für ein j. Für jedes $s \in [s_j, t_0]$ gilt dann:

$$\begin{aligned}
\frac{\varepsilon}{2} \quad > \quad & L(c|_{[a,s]}) + L(c|_{[s,t_0]}) + L(c|_{[t_0,b]}) - \\
& -\left(\sum_{i=0}^{j-1} d(c(s_i), c(s_{i+1})) + d(c(s_j), c(s)) + d(c(s), c(t_0)) + \sum_{i=j+1}^{k} d(c(s_i), c(s_{i+1}))\right) \\
= \quad & \underbrace{L(c|_{[a,s]}) - \sum_{i=0}^{j-1} d(c(s_i), c(s_{i+1})) + d(c(s_j), c(s))}_{\geq 0} + \underbrace{L(c|_{[s,t_0]}) - d(c(s), c(t_0))}_{\geq 0} + \\
& \underbrace{+\, L(c|_{[t_0,b]}) - \sum_{i=j+1}^{k} d(c(s_i), c(s_{i+1}))}_{\geq 0}
\end{aligned}$$

Daraus folgt $L(c|_{[s,t_0]}) - d(c(s), c(t_0)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Aufgrund der Stetigkeit von c kann man $s \in [s_j, t_0)$ zudem so wählen, dass $d(c(s), c(t_0)) < \frac{\varepsilon}{2}$ gilt. Damit gilt dann wie gewünscht:

$$L(c|_{[a,t_0]}) - L(c|_{[a,s]}) = L(c|_{[s,t_0]}) < \varepsilon$$

Zu (v) Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir wählen eine Intervallunterteilung $a = t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_n = b$

derart, dass gilt:

$$L(c) - \sum_{i=1}^{n-1} d(c(t_i), c(t_{i+1})) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Nun wird die punktweise Konvergenz an den Stellen $t_1, \ldots, t_n$ ausgenutzt. Da dies endlich viele Stellen sind, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit:

$$d(c(t_i), c_j(t_i)) < \frac{\varepsilon}{4n} \quad \forall\, j \geq N\,,\ i = 1, \ldots, n$$

Damit gilt nun

$$L(c) \leq \sum_{i=1}^{n-1} d(c(t_i), c(t_{i+1})) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \sum_{i=1}^{n-1} d(c_j(t_i), c_j(t_{i+1})) + 2n \cdot \frac{\varepsilon}{4n} + \frac{\varepsilon}{2} \leq L(c_j) + \varepsilon$$

für jedes $j \geq N$, woraus die Behauptung folgt.

Zu (vi) In $\mathbb{R}^2$ wählen wir die Punkte $p = (0, 0)$ und $q = (1, 1)$. Die Kurven c_i verbinden p und q und verlaufen abschnittsweise nur waagerecht und senkrecht, also in Treppchenform. Mit steigendem Index i sollen dabei die Stufen immer feiner werden, und die Kurven sollen keine unnötigen Umwege machen. Dann gilt $L(c_i) = 2$ für jedes $i \in \mathbb{N}$, aber der (sogar gleichmäßige) Limes c der Folge (c_i) ist die Diagonale von p nach q und hat somit Länge $L(c) = \sqrt{2}$.