Prof. Dr. B. Wilking
Dr. A. Wörner WiSe 2011/12

4. Musterlösung zur Differentialgeometrie 1

Zu Aufgabe 4.1

Zu (i) Es seien $z \in X$ und $r > 0$ gegeben. Die Funktion $d_z := d(z, \cdot)\colon X \to \mathbb{R}$ ist 1-Lipschitz-stetig, also insbesondere stetig. In der Tat, sind $x, y \in X$ und ohne Einschränkung $d_z(x) \geq d_z(y)$, so gilt:

$$|d_z(x) - d_z(y)| = d(z,x) - d(z,y) \leq d(z,y) + d(y,x) - d(z,y) = d(x,y)$$

Damit ist $d_z^{-1}([0,r]) = \{x \in X \mid d(x,z) \leq r\} =: K_r(z)$ eine abgeschlossene Menge. Zudem gilt $B_r(z) \subseteq K_r(z)$, und daher gilt nach Definition des Abschlusses: $\overline{B_r(z)} \subseteq K_r(z)$.

Wir geben nun ein Gegenbeispiel für die umgekehrte Inklusion. Es bezeichne $\|\cdot\|$ die Euklidische Norm in $\mathbb{R}^n$. Wir definieren eine Metrik auf $\mathbb{R}^n$ durch:

$$d(x,y) = \begin{cases} \|x-y\| & : \|x-y\| \leq 1 \\ 1 & : \text{sonst} \end{cases} \qquad , x, y \in \mathbb{R}^n$$

Man rechnet leicht nach, dass $(\mathbb{R}^n, d)$ ein metrischer Raum ist (dies gilt auch allgemeiner durch “Abschneiden” einer beliebigen Metrik). Für jedes $z \in \mathbb{R}^n$ gilt allerdings $K_1(z) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x,z) \leq 1\} = \mathbb{R}^n$. Im Gegensatz dazu ist der Abschluss von $B_1(z)$ bezüglich d dieselbe Menge wie bezüglich $\|\cdot\|$, also $\overline{B_1(z)} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - z\| \leq 1\} \neq \mathbb{R}^n$.

Zu (ii) Es seien (X,d) ein innerer metrischer Raum, $z \in X$ und $r > 0$. Dann gilt stets $\overline{B_r(z)} = K_r(z)$ (Notation von oben). In (i) wurde bereits $\overline{B_r(z)} \subseteq K_r(z)$ gezeigt. Zum Beweis der umgekehrten Inklusion sei $x \in K_r(z)$ gegeben. Zu zeigen ist, dass eine Folge $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq B_r(z)$ existiert mit $x_i \overset{i\to\infty}{\longrightarrow} x$.

Für $x \in B_r(z)$ kann trivialerweise die konstante Folge gewählt werden. Also sei $d(z,x) = r$. Wir wählen eine monoton fallende Folge reeller Zahlen ε_i mit $\varepsilon_i \searrow 0$. Da X inner metrisch ist, existiert zu jedem i eine Kurve c_i der Länge $L(c_i) = r + \varepsilon_i$ von z nach x. Wir nehmen an, dass alle c_i wegparametrisiert sind und setzen $x_i := c_i(r - \varepsilon_i)$. Dann gilt für jedes i: $d(z, x_i) < r$, also $x_i \in B_r(z)$ und $d(x, x_i) \leq 2\varepsilon_i$. Daraus folgt $x_i \overset{i\to\infty}{\longrightarrow} x$.

Zu Aufgabe 4.2

Zu (i) Der Raum (X,d) sei geodätisch. Seien $p, q \in X$ mit $d(p,q) = L$ und $c\colon [0,1] \to X$ ein Weg von p nach q mit $L(c) = L$. Da das Längenfunktional stetig ist (also $t \mapsto L(c|_{[0,t]})$ eine stetige Funktion, siehe Aufgabe 3.3 (iv)), existiert nach dem Zwischenwertsatz ein $\vartheta \in [0,1]$ mit $L(c|_{[0,\vartheta]}) = \frac{L}{2}$. Ebenso ist $L(c|_{[\vartheta,1]}) = \frac{L}{2}$ wegen der Additivität, siehe Aufgabe 3.3 (ii). Wir setzen $m := c(\vartheta)$. Dann gilt

$$L = d(p,q) \leq d(p,m) + d(m,q) \leq \frac{L}{2} + \frac{L}{2} = L$$

und somit überall Gleichheit. Also ist m ein Mittelpunkt von p und q.

Zu (ii) Der Raum (X,d) sei inner metrisch. Seien $p, q \in X$ mit $d(p,q) = L$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Da X ein innerer metrischer Raum ist, existiert ein Weg $c\colon [0,1] \to X$ mit $c(0) = p$, $c(1) = q$

und $L(c) = L + \varepsilon$. Analog zu (i) existiert ein $\vartheta \in [0,1]$ mit $L(c|_{[0,\vartheta]}) = L(c|_{[\vartheta,1]}) = \frac{L+\varepsilon}{2}$. Wir setzen $m := c(\vartheta)$. Dann gilt:

$$d(p,m) \leq \frac{L+\varepsilon}{2} \qquad \text{und} \qquad d(q,m) \leq \frac{L+\varepsilon}{2}$$

Wäre allerdings sogar $d(p,m) < \frac{L-\varepsilon}{2}$, so folgte

$$L = d(p,q) \leq d(p,m) + d(q,m) < \frac{L-\varepsilon}{2} + \frac{L+\varepsilon}{2} = L,$$

Widerspruch. Also gilt $d(p,m) \geq \frac{L-\varepsilon}{2}$, und wir erhalten:

$$2d(p,m) - d(p,q) \leq 2 \cdot \frac{L+\varepsilon}{2} - L = \varepsilon \qquad \text{und} \qquad 2d(p,m) - d(p,q) \geq 2 \cdot \frac{L-\varepsilon}{2} - L = -\varepsilon$$

Damit gilt $|2d(p,m) - d(p,q)| \leq \varepsilon$. Eine analoge Abschätzung ergibt sich für $d(q,m)$, und somit ist m ein ε-Mittelpunkt von p und q.

Zu (iii) Der metrische Raum (X,d) sei vollständig und es gebe zu je zwei Punkten einen Mittelpunkt. Seien $p,q \in X$ mit $d(p,q) = L$. Wir konstruieren eine L-Lipschitz-Abbildung $c\colon [0,1] \to X$ mit $c(0) = p$, $c(1) = q$. Dann folgt sofort aus der Definition der Bogenlänge, dass $L(c) \leq L$ gilt und wegen $L = d(p,q) \leq L(c) \leq L$ überall Gleichheit.

Wir definieren c sukzessiv wie folgt: Setze $c(0) := p$ und $c(1) := q$. Bezeichnet m einen Mittelpunkt von p und q, so setzen wir $c\left(\frac{1}{2}\right) := m$. Entsprechend seien $c\left(\frac{1}{4}\right)$ und $c\left(\frac{3}{4}\right)$ definiert durch Mittelpunkte von p und m bzw. von m und q. Wir iterieren die Konstruktion und erhalten c definiert auf der Menge D der endlichen dyadischen Brüche in $[0,1]$.

Behauptung: $c\colon D \to X$ ist L-Lipschitz. Dies folgt sofort aus der Konstruktion.

Zu zeigen bleibt: c lässt sich auf $[0,1]$ fortsetzen als L-Lipschitz-Abbildung. Dies ist möglich aufgrund zweier Eigenschaften: D ist dicht in $[0,1]$ (d. h. jeder Punkt in $[0,1]$ ist Limes einer Folge in D) und X ist vollständig. Es sei also ein $x \in [0,1]$ gegeben. Dann lässt sich x schreiben als $x = \lim\limits_{i\to\infty} d_i$ mit $d_i \in D$ für alle i. Die konvergente Folge (d_i) ist insbesondere eine Cauchy-Folge. Ist daher ein $\delta > 0$ beliebig gegeben, so existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|d_k - d_\ell| < \frac{\delta}{L}$ für alle $k, \ell \geq N$. Damit gilt

$$d(c(d_k), c(d_\ell)) \leq L \cdot |d_k - d_\ell| < L \cdot \frac{\delta}{L} = \delta$$

und somit ist $(c(d_i))$ eine Cauchy-Folge in X. Da X vollständig ist, konvergiert diese Folge, und wir setzen $c(x) := \lim\limits_{i\to\infty} c(d_i)$. Dies hängt ad hoc noch von der Wahl der Folge (d_i) ab, doch wir werden gleich sehen, dass dies nicht der Fall ist und die Definition somit wohldefiniert.

Wir zeigen nun, dass die fortgesetzte Funktion $c\colon [0,1] \to X$ ebenfalls L-Lipschitz ist. Dazu seien $x, y \in [0,1]$ gegeben und $x_i \to x$, $y_i \to y$ konvergente Folgen in D. Die Metrik $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ ist eine stetige Funktion, und somit ergibt sich:

$$\begin{aligned} d(c(x), c(y)) &= d\left(\lim_{i\to\infty} c(x_i), \lim_{i\to\infty} c(y_i)\right) = \lim_{i\to\infty} d(c(x_i), c(y_i)) \\ &\leq L \cdot \lim_{i\to\infty} |x_i - y_i| = L \cdot \left|\lim_{i\to\infty} x_i - \lim_{i\to\infty} y_i\right| = L \cdot |x - y| \end{aligned}$$

Für $x = y$ erhält man daraus außerdem die Wohldefiniertheit, siehe oben. Es folgt, dass (X,d) geodätisch ist.

Zu (iv) Der metrische Raum (X,d) sei vollständig und es gebe zu je zwei Punkten einen ε-Mittelpunkt für jedes $\varepsilon > 0$. Seien $p,q \in X$ mit $d(p,q) = L$. Wir konstruieren eine Abbildung $c\colon [0,1] \to X$ ganz ähnlich wie in (iii): Setze $c(0) := p$ und $c(1) := q$. Wir wählen ein beliebiges $\varepsilon > 0$ und setzen $c\left(\frac{1}{2}\right) := m$, wobei m ein ε-Mittelpunkt von p und q ist. Die Punkte $c\left(\frac{1}{4}\right)$ und $c\left(\frac{3}{4}\right)$ werden definiert durch $\frac{\varepsilon}{2}$-Mittelpunkte von p und m bzw. von m und q. Wir iterieren, wobei im i-ten Iterationsschritt $\frac{\varepsilon}{2^i}$-Mittelpunkte benutzt werden. Bezeichnet D wieder die Menge der endlichen dyadischen Brüche in $[0,1]$, so erhalten wir eine Abbildung $c\colon D \to X$. Diese ist nach Konstruktion eine Lipschitz-Abbildung mit Lipschitz-Konstante $L + \varepsilon$.

Nun wird c wie in (iii) auf $[0,1]$ fortgesetzt. Wir erhalten eine $(L+\varepsilon)$-Lipschitz-Abbildung $c\colon [0,1] \to X$ mit $c(0) = p$, $c(1) = q$. Da diese Konstruktion für jedes $\varepsilon > 0$ möglich ist (und für alle $p, q \in X$), ist X ein innerer metrischer Raum.

Bemerkung: Die Aufgabenteile (iii) und (iv) zeigen insbesondere, dass man in einem geodätischen bzw. inneren metrischen Raum die Verbingungskurve zwischen zwei Punkten p, q als $d(p,q)$-Lipschitz bzw. als $(d(p,q)+\varepsilon)$-Lipschitz annehmen kann für jedes $\varepsilon > 0$.

Ist X etwa geodätisch und $c\colon [0,1] \to X$ eine Kurve von p nach q der Länge $L := d(p,q)$, so ist $c([0,1])$ kompakt, insbesondere vollständig. Also kann man c gemäß (iii) umparametrisieren und erhält einen L-Lipschitz-Weg von p nach q. Analog für den Fall, dass X nur inner metrisch ist.

Zu Aufgabe 4.3

Zu (i) Direkt nach Definition ist klar, dass d_H nichtnegativ ist und symmetrisch. Ebenso ist klar, dass $d_H(A,A) = 0$ gilt für jede Teilmenge $A \subseteq X$. Zu zeigen bleibt die Dreiecksungleichung. Dazu seien $A, B, C \subseteq X$ gegeben. Weiter sei $r_1 \in \mathbb{R}$ derart, dass $A \subseteq U_{r_1}(B)$ und $B \subseteq U_{r_1}(A)$ gilt, und es sei $r_2 \in \mathbb{R}$ derart, dass $B \subseteq U_{r_2}(C)$ und $C \subseteq U_{r_2}(B)$ gilt. Ist nun $c \in C$ beliebig gegeben, dann gibt es ein $b \in B$ mit $d(c,b) \leq r_2$. Weiter gibt es ein $a \in A$ mit $d(b,a) \leq r_1$. Somit ist $d(c,a) \leq r_1 + r_2$ und daher $C \subseteq U_{r_1+r_2}(A)$. Analog gilt auch $A \subseteq U_{r_1+r_2}(C)$. Daraus folgt wie gewünscht $d_H(A,C) \leq d_H(A,B) + d_H(B,C)$.

Somit ist d_H eine Pseudometrik.

Zu (ii) Zu zeigen ist, dass für jedes $r > 0$ gilt: $A \subseteq U_r(\bar{A})$ und $\bar{A} \subseteq U_r(A)$. Die erste Inklusion gilt trivialerweise für jedes $r > 0$, da bereits $A \subseteq \bar{A}$ gilt. Die zweite Inklusion folgt aus der Definition des Abschlusses. In der Tat, es sei $a \in \bar{A}$ gegeben. Dann gibt es eine Folge in A, die gegen a konvergiert, also zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $a_\varepsilon \in A$ mit $d(a, a_\varepsilon) < \varepsilon$.

Somit gilt $d_H(A, \bar{A}) = 0$.

Zu (iii) Es seien $A, B \subseteq X$ abgeschlossen mit $A \neq B$. Es gebe etwa ein $a \in A \setminus B$. Dann existiert ein $r > 0$ derart, dass $B_r(a) \cap B = \emptyset$ gilt. Dies folgt aus der Abgeschlossenheit von B, denn gäbe es solch ein r nicht, so gäbe es eine Folge in B, die gegen a konvergiert. Da B abgeschlossen ist, wäre dann $a \in B$. Somit gilt aber auch $a \notin U_r(B)$ und daher $d_H(A,B) \geq r > 0$.

Da d_H nach (i) eine Pseudometrik auf der Menge aller Teilmengen von X ist, ist d_H eine Metrik auf der Menge aller abgeschlossenen Teilmengen von X.