Prof. Dr. B. Wilking
Dr. A. Wörner

WiSe 2011/12

5. Musterlösung zur Differentialgeometrie 1

Zu Aufgabe 5.1

Zu (i) Der Raum (X, d) sei lokalkompakt. Da er außerdem vollständig und inner metrisch ist, besagt der Satz von Hopf-Rinow, dass abgeschlossene beschränkte Teilmengen von X kompakt sind. Insbesondere sind alle abgeschlossenen Kugeln kompakt.

Wir wählen ein $x \in K$. Da K kompakt ist, also insbesondere beschränkt, gibt es ein $r > 0$ derart, dass K in der abgeschlossenen Kugel $K_r(x)$ enthalten ist. Außerdem sei ein endliches $R > \operatorname{dist}(x, A)$ gewählt. Behauptung: Es gilt $\operatorname{dist}(K, A) = \operatorname{dist}(K, A \cap K_{R+r}(x))$.

Es gilt $\operatorname{dist}(K, A) \leq \operatorname{dist}(x, A) < R$. Also genügt es zu zeigen, dass für jeden Punkt $y \in A \setminus K_{R+r}(x)$ gilt $\operatorname{dist}(y, K) \geq R$. Dazu seien $y \in A$ und $k \in K$ mit $d(y, k) \leq R$ gegeben. Die Dreiecksungleichung impliziert $d(y, x) \leq d(y, k) + d(k, x) \leq R + r$ und somit $y \in K_{R+r}(x)$. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Da $K_{R+r}(x)$ kompakt ist, ist auch $A \cap K_{R+r}(x)$ kompakt. Die Metrik $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ ist eine stetige Funktion, nimmt also eingeschränkt auf die kompakte Menge $K \times A \cap K_{R+r}(x)$ ein Minimum an. Also gibt es Punkte, die den Abstand $\operatorname{dist}(K, A)$ realisieren.

Zu (ii) Wir betrachten den Hilbertraum

$$\ell^2 = \left\{ (a_i)_{i\in\mathbb{N}} \,\middle|\, \sum\nolimits_{i=1}^{\infty} a_i^2 < \infty \right\}$$

der vollständig und geodätisch ist (Euklidische Metrik). Nun setzen wir $K := \{0\}$ und $A = (a_i)_{i\in\mathbb{N}}$, wobei a_i wie folgt definiert wird:

$$a_i := (0, \ldots, 0, \underbrace{1 + \frac{1}{i}}_{i\text{-te Stelle}}, 0, \ldots) = \left(1 + \frac{1}{i}\right) e_i$$

Dabei bezeichnet $\{e_i\}$ die Standardbasis. Für alle $i \neq j$ gilt dann $d(a_i, a_j) > \sqrt{2}$, also hat A keine Häufungspunkte. Folglich ist A eine abgeschlossene Menge.

Nun gilt $\operatorname{dist}(K, A) = \lim\limits_{i\to\infty} 1 + \frac{1}{i} = 1$, aber es gibt kein a_i mit $d(0, a_i) = 1$.

Zu Aufgabe 5.2

Zu (i) Wir bezeichnen mit L die Menge aller Limites konvergenter Folgen $(a_i) \subseteq X$ mit $a_i \in A_i$ für alle i. Zu zeigen ist also $L = A$. Zunächst kann man feststellen, dass L abgeschlossen ist. Dies folgt sofort mit einem Diagonalargument aus der Definition von L: Ist $(\ell_j) \subseteq L$ eine Folge, die gegen $\ell \in X$ konvergiert, so ist also jedes ℓ_j Limes einer Folge $(\ell_{ji})_{i\in\mathbb{N}}$ mit $\ell_{ji} \in A_i$. Dann ist $(\ell_{ii})_i$ konvergent gegen ℓ und somit in L enthalten.

Wir nehmen zunächst an, es gäbe ein $x \in L \setminus A$. Da A abgeschlossen ist, gibt es ein $r > 0$ derart, dass auch $B_r(x) \cap A = \emptyset$ gilt. Da $A_i \xrightarrow{i\to\infty} A$ bezüglich d_H gilt, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $A_i \subseteq U_{r/2}(A)\ \ \forall\, i \geq N$. Damit gilt für solche i auch $A_i \cap B_{r/2}(x) = \emptyset$, und x kann kein Limes einer Folge (a_i) mit $a_i \in A_i$ sein, Widerspruch. Damit ist $L \subseteq A$ gezeigt.

Nun nehmen wir an, es gäbe ein $x \in A \setminus L$. Da auch L abgeschlossen ist, gibt es wiederum ein $R > 0$ derart, dass $B_R(x) \cap L = \emptyset$ gilt. Dann muss es auch ein $r \in (0, R]$ derart geben, dass für unendlich viele $i \in \mathbb{N}$ gilt $A_i \cap B_r(x) = \emptyset$. Denn sonst würde für jedes $r > 0$ ein $N_r \in \mathbb{N}$ existieren mit $A_i \cap B_r(x) \neq \emptyset \;\; \forall i \geq N_r$. Man sieht leicht, dass man dann eine Folge (a_i) mit $a_i \in A_i$ konstruieren könnte, die gegen x konvergiert. Indem wir zu einer Teilfolge von (A_i) übergehen, können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $A_i \cap B_r(x) = \emptyset$ für alle i gilt. Wir setzen $A' := A \setminus B_r(x)$. Es gilt $A' \neq A$, aber wir zeigen nun, dass auch A' Limes der Folge (A_i) bezüglich d_H ist. Dazu sei ein $\varepsilon > 0$ gegeben. Wegen $A_i \overset{i\to\infty}{\longrightarrow} A$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $A \subseteq U_\varepsilon(A_i) \;\; \forall i \geq N$. Also gilt auch $A' \subseteq U_\varepsilon(A_i) \;\; \forall i \geq N$. Andererseits gilt für alle $i \geq N$, dass $A_i \subseteq U_\varepsilon(A)$ und $A_i \cap B_r(x) = \emptyset$ ist, also auch $A_i \subseteq U_\varepsilon(A')$. Somit konvergiert die Folge (A_i) ebenfalls gegen A'. Da A, A' Elemente des metrischen Raumes $(\mathcal{A}(X), d_H)$ sind und metrische Räume hausdorffsch sind, also der Grenzwert konvergenter Folgen eindeutig, folgt $A = A'$, Widerspruch. Damit ist auch $A \subseteq L$ gezeigt.

Zu (ii) (a) Es gelte $A_{i+1} \subseteq A_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Zunächst stellen wir fest, dass $\bigcap_i A_i$ als Schnitt abgeschlossener Mengen wieder abgeschlossen ist, also $\bigcap_i A_i \in \mathcal{A}(X)$ gilt. Weiter gilt $\bigcap_i A_i \subseteq A_k$ für jedes $k \in \mathbb{N}$, also trivialerweise auch $\bigcap_i A_i \subseteq U_\varepsilon(A_k)$ für jedes k und jedes $\varepsilon > 0$.

Es sei nun ein $\varepsilon > 0$ gegeben. Zu zeigen ist $A_k \subseteq U_\varepsilon\left(\bigcap_i A_i\right)$ für fast alle $k \in \mathbb{N}$. Dazu genügt es zu zeigen, dass ein solches k existiert. Wir nehmen das Gegenteil an, also dass es zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $a_k \in A_k$ gibt mit $\operatorname{dist}\left(a_k, \bigcap_i A_i\right) \geq \varepsilon$. Da X kompakt ist, hat die Folge (a_k) einen Häufungspunkt $a \in X$. Dabei gilt auch $\operatorname{dist}\left(a, \bigcap_i A_i\right) \geq \varepsilon$. Daher gilt $\left(\bigcap_i A_i\right) \cap B_{\varepsilon/2}(a) = \emptyset$, und es gibt unendlich viele Indices k mit $A_k \cap B_{\varepsilon/2}(a) \neq \emptyset$. Da (A_k) eine absteigende Kette ist, muss es mindestens einen Punkt $x \in B_{\varepsilon/2}(a)$ geben, der in allen Mengen A_k enthalten ist. Daraus folgt $x \in \left(\bigcap_i A_i\right) \cap B_{\varepsilon/2}(a)$, Widerspruch.

Damit ist $A_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \bigcap_i A_i$ bezüglich d_H gezeigt.

Zu (ii) (b) Es gelte $A_{i+1} \supseteq A_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Wiederum gilt trivialerweise $A_k \subseteq U_\varepsilon\left(\overline{\bigcup_i A_i}\right)$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ und jedes $\varepsilon > 0$.

Nun sei ein $\varepsilon > 0$ gegeben. Es genügt zu zeigen, dass ein $k \in \mathbb{N}$ existiert mit $\overline{\bigcup_i A_i} \subseteq U_\varepsilon(A_k)$. Angenommen, ein solches k existiert nicht. Dann gibt es zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $a_k \in \overline{\bigcup_i A_i}$ mit $\operatorname{dist}(a_k, A_k) \geq \varepsilon$. Da X kompakt ist und $\overline{\bigcup_i A_i}$ abgeschlossen, ist $\overline{\bigcup_i A_i}$ auch kompakt. Also besitzt die Folge (a_k) einen Häufungspunkt $a \in \overline{\bigcup_i A_i}$. Damit liegen unendlich viele Punkte a_k in $B_{\varepsilon/2}(a)$. Also muss $B_{\varepsilon/2}(a) \cap A_k = \emptyset$ für unendlich viele $k \in \mathbb{N}$ gelten, und da (A_k) eine aufsteigende Kette ist, sogar für alle $k \in \mathbb{N}$. Daraus folgt aber $a \notin \overline{\bigcup_i A_i}$, Widerspruch.

Somit ist auch hier $A_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \bigcap_i A_i$ bezüglich d_H gezeigt.

Zu Aufgabe 5.3

Es seien $p, q \in X$. Zu zeigen ist $d(f(p), f(q)) \leq d(p, q)$. Für $p = q$ ist dies klar, also sei $p \neq q$. Weiter sei ein $L > d(p, q)$ beliebig gewählt. Da X ein innerer metrischer Raum ist, existiert eine L-Lipschitz-Abbildung $c\colon [0,1] \to X$ mit $c(0) = p$, $c(1) = q$. Da c insbesondere stetig ist und $[0,1]$ kompakt, ist auch $c([0,1]) \subseteq X$ kompakt. Nach Voraussetzung ist f eine lokale Isometrie, also existiert um jedes $x \in X$ eine offene Kugel $B(x)$, so dass $f|_{B(x)}$ abstandserhaltend ist. Die Menge $\{B(x) \mid x \in c([0,1])\}$ überdeckt die kompakte Menge $c([0,1])$. Also gibt es eine endliche Teilüberdeckung. Das bedeutet, es gibt offene Kugeln $B_1, \ldots, B_N$ mit $N < \infty$, für die gilt:

(a) $\bigcup_{i=1}^{N} B_i \supseteq c([0,1])$

(b) $f|_{B_i}$ ist abstandserhaltend für alle $i = 1, \ldots, N$

(c) Der Mittelpunkt jeder Kugel B_i liegt in $c([0,1])$.

Wir wollen annehmen, dass die Kurve, nachdem sie eine Kugel B_i verlassen hat, nicht mehr nach B_i zurückkehrt. Dies kann wie folgt erreicht werden: Wegen Eigenschaft (c) gibt es ein

$t_0 \in [0,1]$ mit $c(t_0) =: m$ ist der Mittelpunkt von B_i. Angenommen, es gibt $t_0 < t_1 < t_2 \le 1$ mit $c(t_1) \notin B_i$, $c(t_2) \in B_i$. Dann ändere c, indem m und $c(t_2)$ durch einen Weg in B_i verbunden werden. Da $c(t_1)$ außerhalb von B_i liegt, ist diese Änderung möglich, ohne c zu verlängern. Mit anderen Worten, c bleibt dabei L-Lipschitz.

Wir numerieren nun die Kugeln B_i so um, dass c sie in der Reihenfolge $1, \dots, N$ durchläuft. Das Intervall $[0,1]$ lässt sich schreiben als Vereinigung kompakter Intervalle $I_1, \dots, I_N$, so dass $c(I_i) \subseteq B_i$ gilt. Da $f|_{B_i}$ abstandserhaltend ist für alle i, ist die Komposition $f \circ c \colon [0,1] \to Y$ eine L-Lipschitz-Abbildung.

Somit ist $d(f(p), f(q)) \le L$. Da dies für jedes $L > d(p,q)$ gilt, muss $d(f(p), f(q)) \le d(p,q)$ gelten, was zu zeigen war.

Um zu sehen, dass f aber nicht unbedingt eine Isometrie sein muss, geben wir folgendes Gegenbeispiel: Es seien $X = \mathbb{R}$ und $Y = \mathbb{S}^1$ mit der jeweils inneren Metrik versehen (diese Räume sind sogar geodätisch). Weiter sei $f \colon X \to Y$, $t \mapsto (\cos t, \sin t)$. Dann ist f eine lokale Isometrie, denn offensichtlich ist $f|_{(x,x+\pi)}$ abstandserhaltend für jedes $x \in \mathbb{R}$. Allerdings ist f keine Isometrie, denn f ist nicht injektiv.

Zu Aufgabe 5.4

Zu (i) Eine Geodätische in $\mathbb{H}^2 \subseteq \mathbb{R}^{2,1}$ ergibt sich als Schnitt eines 2-dimensionalen Untervektorraumes mit $\mathbb{H}^2$. Um die Geodätische zwischen p und q zu erhalten, wählen wir dabei den Untervektorraum, der von p und q aufgespannt wird, also $\{sp + tq \mid s,t \in \mathbb{R}\}$. Der Schnitt mit $\mathbb{H}^2$ ergibt die notwendige Bedingung $\langle\!\langle sp+tq, sp+tq \rangle\!\rangle = -1$. Dies ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} -1 &= \langle\!\langle sp+tq, sp+tq \rangle\!\rangle \\ &= \langle\!\langle sp, sp \rangle\!\rangle + 2\langle\!\langle sp, tq \rangle\!\rangle + \langle\!\langle tq, tq \rangle\!\rangle \\ &= -s^2 + 2st\langle\!\langle p, q \rangle\!\rangle - t^2 \end{aligned}$$

da $p, q \in \mathbb{H}^2$ gilt. Wir können also schreiben:

$$s = s(t) = t\langle\!\langle p,q \rangle\!\rangle \pm \sqrt{t^2\langle\!\langle p,q \rangle\!\rangle^2 - t^2 + 1}$$

Dabei wurde noch nicht die Bedingung berücksichtigt, dass die e_3-Koordinate positiv sein muss. Für $t = 0$ sieht man, dass die Lösung mit negativer Wurzel entfallen muss; aus Stetigkeitsgründen gilt dies dann für alle t. Die gesamte hyperbolische Gerade durch p und q ist also gegeben durch

$$\left\{ \left(t\langle\!\langle p,q \rangle\!\rangle + \sqrt{t^2\langle\!\langle p,q \rangle\!\rangle^2 - t^2 + 1}\right)p + tq \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}$$

bzw. in Form einer Abbildung als Geodätische von p nach q:

$$c \colon [0,1] \to \mathbb{H}^2 ,\ t \mapsto \left(t\langle\!\langle p,q \rangle\!\rangle + \sqrt{t^2\langle\!\langle p,q \rangle\!\rangle^2 - t^2 + 1}\right)p + tq$$

Man kann nun p und q einsetzen; insbesondere ist $\langle\!\langle p,q \rangle\!\rangle = -\cosh 3 \cosh 2$.

Zu (ii) Die Bestimmung der Geodätischen von p aus in Richtung e_2 erfolgt ganz ähnlich. Der zugehörige Untervektorraum ist gegeben durch $\{sp + te_2 \mid s,t \in \mathbb{R}\}$. Diesmal ist zu beachten, dass $e_2 \notin \mathbb{H}^2$ gilt. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} -1 &= \langle\!\langle sp+te_2, sp+te_2 \rangle\!\rangle \\ &= s^2\langle\!\langle p, p \rangle\!\rangle + 2st\langle\!\langle p, e_2 \rangle\!\rangle + t^2\langle\!\langle e_2, e_2 \rangle\!\rangle \\ &= -s^2 + 0 + t^2 \end{aligned}$$

In diesem Fall bietet sich eine neue Parametrisierung $s = s(u) = \cosh u$ und $t = t(u) = \sinh u$ an (die negative Lösung entfällt wieder, siehe oben). Wir erhalten

$$c \colon \mathbb{R} \to \mathbb{H}^2 ,\ u \mapsto p\cosh u + e_2 \sinh u$$

als Geodätische.

Zu (iii) Wir suchen zunächst Matrizen $B, C \in O_+(2,1)$ mit $Be_3 = p, Ce_3 = q$. Im Fall von B bedeutet das, wir suchen v_1, v_2 derart, dass die Matrix (v_1, v_2, p) in $O_+(2,1)$ liegt. Wegen $p \in \mathbb{H}^2$ muss dann gelten: $\operatorname{span}(v_1, v_2) = \{v \in \mathbb{R}^3 \,|\, \langle\langle v, p\rangle\rangle = 0\}$. Außerdem muss gelten: $\langle\langle v_1, v_1\rangle\rangle = \langle\langle v_2, v_2\rangle\rangle = 1$ sowie $\langle\langle v_1, v_2\rangle\rangle = 0$. Machen wir den Ansatz $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, so sieht man in der vorliegenden Situation recht schnell, dass $v_2 = \begin{pmatrix} \cosh 3 \\ 0 \\ \sinh 3 \end{pmatrix}$ eine passende Ergänzung ist.

Es ist also:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \cosh 3 & \sinh 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sinh 3 & \cosh 3 \end{pmatrix}$$

Nach demselben Muster erhält man:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh 2 & \sinh 2 \\ 0 & \sinh 2 & \cosh 2 \end{pmatrix}$$

Berechnet man nun

$$\begin{aligned} A \;&:=\; CB^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh 2 & \sinh 2 \\ 0 & \sinh 2 & \cosh 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \cosh 3 & 0 & -\sinh 3 \\ -\sinh 3 & 0 & \cosh 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \cosh 3 \cosh 2 - \sinh 3 \sinh 2 & 0 & \cosh 3 \sinh 2 - \sinh 3 \cosh 2 \\ \cosh 3 \sinh 2 - \sinh 3 \cosh 2 & 0 & \cosh 3 \cosh 2 - \sinh 3 \sinh 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

so ist A die gewünschte Matrix.