Prof. Dr. B. Wilking
Dr. A. Wörner

WiSe 2011/12

6. Musterlösung zur Differentialgeometrie 1

Zu Aufgabe 6.1

Wir betrachten die Situation auf der Einheitssphäre. Bogenlängen auf Großkreisen und zugehörige Winkel sind dann gleich groß.

Die Punkte N und M bezeichnen die Lage New Yorks bzw. Moskaus. Der Großkreis durch N und M schneidet den Äquator zweimal. Wir bezeichnen die Schnittpunkte mit A_N und A_M derart, dass sie in der Reihenfolge A_N, N, M, A_M auf dem Großkreis liegen. Dabei sind A_N und A_M Antipoden. Der nördlichste Punkt H auf der Kürzesten NM liegt genau in der Mitte des halben Großkreises, der NM enthält, also $|A_N H| = |A_M H|$. Da weder N noch M der Nordpol ist, existiert jeweils eine eindeutige Kürzeste von N bzw. M auf den Äquator. Die Endpunkte dieser Kürzesten werden mit F_N bzw. F_M bezeichnet. Mit diesen Bezeichnungen ist folgendes bekannt:

- $|NF_N| = 40° \, 43'$
- $|MF_M| = 55° \, 45'$
- $|F_N F_M| = 74° \, 0' + 37° \, 37' = 111° \, 37'$
- $\measuredangle(NF_N A_N) = \measuredangle(MF_M A_M) = \frac{\pi}{2}$

Gesucht ist der Abstand von H zum Äquator. Dies entspricht den Winkeln $\measuredangle(NA_N F_N) = \measuredangle(MA_M F_M)$. Auf das Dreieck $\triangle MA_M F_M$ wenden wir den Sinus-Kosinus-Satz an. Dabei gilt $\cos \measuredangle(MF_M A_M) = 0$ und daher:

$$\sin |MA_M| \cos \measuredangle(MA_M F_M) = \cos |MF_M| \sin |A_M F_M|$$

Nach dem Sinus-Satz ist außerdem

$$\sin |MA_M| = \frac{\sin |MF_M|}{\sin \measuredangle(MA_M F_M)}$$

und somit:

$$\sin |MF_M| \cot \measuredangle(MA_M F_M) = \cos |MF_M| \sin |A_M F_M|$$

bzw.

$$\cot \measuredangle(MA_M F_M) = \cot |MF_M| \sin |A_M F_M| \qquad (*)$$

Eine analoge Formel ergibt sich für N. Beachtet man nun $\measuredangle(NA_N F_N) = \measuredangle(MA_M F_M)$ und $|A_M F_M| + |F_M F_N| + |F_N A_N| = \pi$, so erhält man daraus:

$$\begin{aligned}
\cot \measuredangle(MA_M F_M) &= \cot |NF_N| \sin |A_N F_N| \\
&= \cot |NF_N| \sin(\pi - |A_M F_M| - |F_M F_N|) \\
&= \cot |NF_N| \sin(|A_M F_M| + |F_M F_N|) \\
&= \cot |NF_N| (\sin |A_M F_M| \cos |F_M F_N| + \sin |F_M F_N| \cos |A_M F_M|)
\end{aligned}$$

Gleichsetzen mit $(*)$ ergibt

$$\cot |MF_M| = \cot |NF_N| \cos |F_M F_N| + \cot |NF_N| \sin |F_M F_N| \cot |A_M F_M|$$

und somit:

$$\cot|A_MF_M| = \frac{\cot|MF_M| - \cot|NF_N|\cos|F_MF_N|}{\cot|NF_N|\sin|F_MF_N|} = \frac{\cot|MF_M|}{\cot|NF_N|\sin|F_MF_N|} - \cot|F_MF_N|$$

Einsetzen ergibt:

$$\cot|A_MF_M| = 1,027\ldots \quad\Longrightarrow\quad |A_MF_M| = 44^\circ\, 14'\, 54{,}28''$$

Mit $(*)$ ergibt sich daraus das Ergebnis:

$$\cot\measuredangle(MA_MF_M) = 0,475\ldots \quad\Longrightarrow\quad \measuredangle(MA_MF_M) = 64^\circ\, 35'\, 16{,}21''$$

Zu Aufgabe 6.2

Zu (i) Wir benutzen den Seiten-Kosinus-Satz

$$\cosh a = \cosh b\cosh c - \sinh b\sinh c\cos\alpha \qquad \text{bzw.} \qquad \cos\alpha = \frac{\cosh b\cosh c - \cosh a}{\sinh b\sinh c}$$

und die entsprechenden Formeln nach zyklischer Vertauschung der Variablen. Gerundet auf die 5. Nachkommastelle ergibt sich (im Bogenmaß):

$$\alpha = 0,09179 \quad , \quad \beta = 0,25236 \quad , \quad \gamma = 0,74631$$

Zu (ii) Nach dem Winkel-Kosinus-Satz ist

$$\cos\alpha = \cosh a\sin\beta\sin\gamma - \cos\beta\cos\gamma$$

und es ergibt sich:

$$\alpha = 1,17994$$

Aus dem Winkel-Kosinus-Satz erhalten wir ebenso

$$\cosh b = \frac{\cos\beta + \cos\alpha\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\gamma}$$

und entsprechend für c. Dies ergibt:

$$b = 0,95086 \quad , \quad c = 0,69083$$

Zu (iii) Für die Höhe h_a auf die Seite a ergibt sich nach dem Sinus-Satz

$$\frac{\sinh b}{1} = \frac{\sinh h_a}{\sin\gamma} \qquad \text{bzw.} \qquad \sinh h_a = \sinh b\sin\gamma$$

und entsprechend mit zyklischer Vertauschung. Die Formel gilt auch, wenn die Höhe außerhalb des Dreiecks liegt, da $\sin\gamma = \sin(\pi - \gamma)$ ist. Wir erhalten für das Dreieck aus (i):

$$h_a = 3,61316 \quad , \quad h_b = 2,61565 \quad , \quad h_c = 1,64775$$

Für das Dreieck aus (ii) erhalten wir:

$$h_a = 0,60872 \quad , \quad h_b = 0,64509 \quad , \quad h_c = 0,89387$$

Es sei s_a die Seitenhalbierende der Seite a. Nach dem Seiten-Kosinus-Satz gilt

$$\cosh s_a = \cosh b\cosh\frac{a}{2} - \sinh b\sinh\frac{a}{2}\cos\gamma$$

und entsprechend mit zyklischer Vertauschung. Wir erhalten für das Dreieck aus (i):

$$s_a = 3,76426 \quad , \quad s_b = 3,10711 \quad , \quad s_c = 1,77938$$

Für das Dreieck aus (ii) erhalten wir:

$$s_a = 0,64151 \quad , \quad s_b = 0,69520 \quad , \quad s_c = 0,89603$$

Zu Aufgabe 6.3

Zu (i) Wir benutzen Induktion nach n. Der Fall $n = 1$, also drei Punkte auf der Kreislinie, ist einfach einzusehen, da sich in diesem Fall Abstände entweder addieren oder subtrahieren.

Es sei nun $n \geq 2$. Bekannt ist, dass die $O(n+1)$ isometrisch und transitiv auf der $\mathbb{S}^n$ operiert. Wegen der Transitivität gibt es Matrizen $P, Q \in O(n+1)$ mit $Pp_1 = e_1 = (1, 0, \ldots, 0)^t$ und $Qq_1 = e_1$. Die sogenannte *Standgruppe* oder der *Stabilisator* von e_1 bezeichnet die Untergruppe aller Matrizen aus $O(n+1)$, die e_1 festhalten. Offenbar sind Matrizen der Form

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & S & \\ 0 & & & \end{array}\right) \quad , \quad S \in O(n)$$

im Stabilisator von e_1 enthalten. (Man kann sich leicht überlegen, dass dies auch alle sind, wird aber hier nicht benötigt.) Ebenso ist klar, dass jede dieser Matrizen auch $-e_1$ festhält.

Wir nehmen zunächst an, dass für $i = 2, 3$ gilt $Pp_i \notin \{e_1, -e_1\}$. Wir können daher annehmen, dass sich e_1 und Pp_i jeweils durch eine eindeutige Kürzeste verbinden lassen, $i = 2, 3$. Auf dieser Kürzesten oder gegebenenfalls ihrer Verlängerung bezeichnen wir den Punkt mit Abstand $\frac{\pi}{2}$ zu e_1 mit p'_2 bzw. p'_3. Analog definieren wir q'_2 und q'_3 auf den (verlängerten) Kürzesten zwischen e_1 und Qq_2 bzw. Qq_3.

Wegen der isometrischen Wirkung der $O(n+1)$ und der Voraussetzungen haben die sphärischen Dreiecke $\triangle e_1 Pp_2 Pp_3$ und $\triangle e_1 Qq_2 Qq_3$ gleiche Seitenlängen, also auch gleiche Winkel nach dem Seitenkosinussatz. Insbesondere sind die Winkel am Punkt e_1 gleich groß. Erneute Anwendung des Seitenkosinussatzes ergibt, dass auch $d(p'_2, p'_3) = d(q'_2, q'_3)$ gilt. Da offenbar die Menge $\{s \in \mathbb{S}^n \mid d(s, e_1) = \frac{\pi}{2}\}$ isometrisch ist zur $\mathbb{S}^{n-1}$, folgt aus der Induktionsvoraussetzung, dass es eine Matrix B im Stabilisator von e_1 gibt mit $Bp'_2 = q'_2$ und $Bp'_3 = q'_3$. Daraus folgt dann wiederum (durch Anwendung des Seitenkosinussatzes, siehe oben), dass $BPp_2 = Qq_2$ und $BPp_3 = Qq_3$ gilt.

Zu klären bleibt die Annahme von oben. Gilt etwa $Pp_2 = e_1$, so folgt aus den Voraussetzungen bereits $Qq_2 = e_1$ und ebenso für $-e_1$. Da B die Punkte $\pm e_1$ festhält, ändert sich an der Konstruktion nichts.

Insgesamt folgt nun, dass $A := Q^{-1}BP \in O(n+1)$ das Gewünschte tut.

Zu (ii) Bekannt ist, dass die $O_+(n, 1)$ transitiv und isometrisch auf $\mathbb{H}^n$ operiert. Also gibt es Matrizen $P, Q \in O_+(n, 1)$ mit $Pp_1 = Qq_1 = e_{n+1}$. Es ist wiederum leicht zu sehen, dass Matrizen der Form

$$\left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & S & & \vdots \\ & & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad , \quad S \in O(n)$$

in $O_+(n, 1)$ liegen und den Punkt e_{n+1} stabilisieren. Wählt man einen festen Abstand $d > 0$, so ist offenbar die Menge $D := \{h \in \mathbb{H}^n \mid d(e_{n+1}, h) = d\}$ isometrisch zu einer skalierten $\mathbb{S}^{n-1}$, auf der die $O(n)$ in der in Teil (i) bewiesenen Weise wirkt. Man verbinde nun e_1 mit Pp_2 und Pp_3 durch hyperbolische Geraden und verlängere sie gegebenenfalls, bis sie die Menge D schneiden. Die Schnittpunkte seien mit p'_2 und p'_3 bezeichnet. Analog definiert man q'_2 und q'_3, und die weitere Argumentation erfolgt analog zu der in Teil (i). Man beachte wieder, dass auch bei hyperbolischen Dreiecken aus dem Seitenkosinussatz folgt, dass durch die drei Seitenlängen auch alle Winkel bestimmt sind bzw. dass durch zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel die gegenüberliegende Seite und die übrigen Winkel bestimmt sind.

Zu Aufgabe 6.4

Es sei $\kappa_n \neq 0$ und $\triangle abc_n \subseteq M^2_{\kappa_n}$ ein geodätisches Dreieck mit dem der Seite c_n gegenüberliegenden Winkel γ. Für $\kappa_n > 0$ ergibt sich nach dem Seiten-Kosinus-Satz:

$$\cos(\sqrt{\kappa_n}c_n) = \cos(\sqrt{\kappa_n}a)\cdot\cos(\sqrt{\kappa_n}b) + \kappa_n \cdot \frac{1}{\sqrt{\kappa_n}}\sin(\sqrt{\kappa_n}a)\cdot\frac{1}{\sqrt{\kappa_n}}\sin(\sqrt{\kappa_n}b)\cdot\cos\gamma$$

Nun betrachten wir die Taylor-Entwicklung nach $\sqrt{\kappa_n}$ bis zur 2. Ordnung. Die folgende Rechnung rechtfertigt, dass höhere Ordnungen beim Grenzübergang $\kappa_n \to 0$ keine Rolle spielen.

$$\begin{aligned}
1-\frac{1}{2}\kappa_n c_n^2 + O(\sqrt{\kappa_n}^3) &= \Big(1-\frac{1}{2}\kappa_n a^2 + O(\sqrt{\kappa_n}^3)\Big)\Big(1-\frac{1}{2}\kappa_n b^2 + O(\sqrt{\kappa_n}^3)\Big) \\
&\quad + \Big(\sqrt{\kappa_n}a + O(\sqrt{\kappa_n}^3)\Big)\Big(\sqrt{\kappa_n}b + O(\sqrt{\kappa_n}^3)\Big)\cos\gamma \\
1-\frac{1}{2}\kappa_n c_n^2 + O(\sqrt{\kappa_n}^3) &= 1-\frac{1}{2}\kappa_n a^2 - \frac{1}{2}\kappa_n b^2 + \frac{1}{4}\kappa_n^2 a^2 b^2 + \kappa_n ab\cos\gamma + O(\sqrt{\kappa_n}^3) \\
\kappa_n c_n^2 + O(|\kappa_n|^{\frac{3}{2}}) &= \kappa_n a^2 + \kappa_n b^2 - \frac{1}{2}\kappa_n^2 a^2 b^2 - 2\kappa_n ab\cos\gamma + O(|\kappa_n|^{\frac{3}{2}}) \\
c_n^2 + O(|\kappa_n|^{\frac{1}{2}}) &= a^2 + b^2 - \frac{1}{2}\kappa_n a^2 b^2 - 2ab\cos\gamma + O(|\kappa_n|^{\frac{1}{2}}) \qquad (*)
\end{aligned}$$

Im Falle $\kappa_n < 0$ besagt der Seiten-Kosinus-Satz:

$$\cosh(\sqrt{-\kappa_n}c_n) = \cosh(\sqrt{-\kappa_n}a)\cdot\cosh(\sqrt{-\kappa_n}b) + \kappa_n\cdot\frac{1}{\sqrt{-\kappa_n}^2}\sinh(\sqrt{-\kappa_n}a)\cdot\sinh(\sqrt{-\kappa_n}b)\cdot\cos\gamma$$

Für die Taylor-Entwicklung ergibt sich nunmehr:

$$\begin{aligned}
1+\frac{1}{2}\sqrt{-\kappa_n}^2 c_n^2 + O(|\kappa_n|^{\frac{3}{2}}) &= \Big(1+\frac{1}{2}\sqrt{-\kappa_n}^2 a^2 + O(|\kappa_n|^{\frac{3}{2}})\Big)\Big(1+\frac{1}{2}\sqrt{-\kappa_n}^2 b^2 + O(|\kappa_n|^{\frac{3}{2}})\Big) \\
&\quad - \Big(\sqrt{-\kappa_n}a + O(|\kappa_n|^{\frac{3}{2}})\Big)\Big(\sqrt{-\kappa_n}b + O(|\kappa_n|^{\frac{3}{2}})\Big)\cos\gamma \\
1-\frac{1}{2}\kappa_n c_n^2 + O(|\kappa_n|^{\frac{3}{2}}) &= 1-\frac{1}{2}\kappa_n a^2 - \frac{1}{2}\kappa_n b^2 + \frac{1}{4}\kappa_n^2 a^2 b^2 + \kappa_n ab\cos\gamma + O(|\kappa_n|^{\frac{3}{2}}) \\
c_n^2 + O(|\kappa_n|^{\frac{1}{2}}) &= a^2 + b^2 - \frac{1}{2}\kappa_n a^2 b^2 - 2ab\cos\gamma + O(|\kappa_n|^{\frac{1}{2}})
\end{aligned}$$

Dies entspricht wieder dem Ausdruck $(*)$. Für $\kappa_n \to 0$ folgt daraus

$$c_\infty^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

also der Kosinus-Satz der Euklidischen Geometrie und insbesondere die Existenz von c_∞.