Prof. Dr. B. Wilking
Dr. A. Wörner

WiSe 2011/12

7. Musterlösung zur Differentialgeometrie 1

Zu Aufgabe 7.1

Zu (i) Es sei $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare Basis der Topologie. Wir setzen

$$I := \{i \in \mathbb{N} \,|\, \bar{U}_i \text{ ist kompakt}\}$$

und behaupten dass $(U_i)_{i\in I}$ ebenfalls eine Basis der Topologie ist. Dazu sei $V \subseteq M$ offen und $p \in V$. Wegen der Lokalkompaktheit besitzt p eine kompakte Umgebung $K(p)$. Nach der Definition einer Umgebung gibt es dann auch eine offene Umgebung $W(p)$ mit $p \in W(p) \subseteq K(p)$. Nach eventueller Schnittbildung können wir $W(p) \subseteq V$ annehmen. Da $W(p)$ offen ist, gibt es eine Indexmenge $J(p) \subseteq \mathbb{N}$ mit $W(p) = \bigcup_{i\in J(p)} U_i$. Für alle $i \in J(p)$ gilt $U_i \subseteq W(p) \subseteq K(p)$. Insbesondere ist $\bar{U}_i$ als abgeschlossene Menge und Teilmenge eines Kompaktums kompakt für alle $i \in J(p)$. Somit folgt $J(p) \subseteq I$. Schließlich ist

$$V = \bigcup_{p\in V} W(p) = \bigcup_{p\in V} \bigcup_{i\in J(p)} U_i.$$

Setzen wir nun $J(V) := \bigcup_{p\in V} J(p) \subseteq I$, so folgt $V = \bigcup_{i\in J(V)} U_i$. Also ist $(U_i)_{i\in I}$ eine Basis der Topologie. Da I endlich oder abzählbar unendlich ist, gibt es eine surjektive Abbildung $s\colon \mathbb{N} \to I$. Offenbar hat nun $G_i := U_{s(i)}$, $i \in \mathbb{N}$, die geforderten Eigenschaften.

Zu (ii) Wir definieren die Mengen C_i induktiv. Setze $C_1 := \bar{G}_1$. Wir nehmen an, C_k sei bereits definiert. Um C_{k+1} zu definieren, betrachten wir die Überdeckung $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} G_i = M \supseteq C_k$ und wählen eine endliche Teilüberdeckung $G_{i_1} \cup \ldots \cup G_{i_h}$ von C_k. Setze nun $j(k+1) := \max\{i_1, \ldots, i_h, k+1\}$ und definiere $C_{k+1} := \bigcup_{i=1}^{j(k+1)} \bar{G}_i$. Offenbar ist dann C_{k+1} kompakt, und es gilt $\mathring{C}_{k+1} \supseteq \bigcup_{i=1}^{j(k+1)} G_i \supseteq C_k$.

Zu (iii) Es sei $i \in \mathbb{N}$ und $W_\alpha := U_\alpha \cap (\mathring{C}_{i+1} \setminus C_{i-2})$ für alle $\alpha \in A$. Dann ist $\bigcup_{\alpha\in A} W_\alpha$ eine offene Überdeckung des Kompaktums $C_i \setminus \mathring{C}_{i-1}$. Es sei $W_{\alpha_1} \cup \ldots \cup W_{\alpha_{r_i}}$ eine endliche Teilüberdeckung. Setze nun $V_{i\rho} := W_{\alpha_\rho}$ für $\rho = 1, \ldots r_i$. Dann hat $V_{i1}, \ldots, V_{ir_i}$ offenkundig die geforderten Eigenschaften.

Zu (iv) Mit den Bezeichnungen aus (iii) setzen wir $B := \{(i,\rho) \,|\, i \in \mathbb{N}, \rho = 1, \ldots r_i\}$. Aufgrund der Forderung (b) ist $\bigcup_{\beta\in B} V_\beta$ eine Verfeinerung von $\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha$. Für jedes $p \in M$ gibt es ein minimales $i \in \mathbb{N}$ mit $p \in C_i$. Dann ist

$$p \in C_i \setminus C_{i-1} \subseteq \bigcup_{\rho=1}^{r_i} V_{i\rho}.$$

Also ist $\bigcup_{\beta\in B} V_\beta$ eine Überdeckung von M.

Es bleibt zu zeigen, daß $\bigcup_{\beta\in B} V_\beta$ lokal endlich ist. Sei also $p \in M$. Wähle wieder i mit $p \in C_i$. Dann ist C_{i+1} eine Umgebung von p und aufgrund der Eigenschaft (c) gilt $V_{j\rho} \cap C_{i+1} = \varnothing$ für alle $j > i + 3$.

Zu Aufgabe 7.2

Zu (i) Wir wählen zunächst eine Folge von Kompakta $(C_i)_{i\in\mathbb{N}}$ wie in Aufgabe 7.1 (ii). Nun sei $i \in \mathbb{N}$ und $p \in C_{i+1} \setminus \mathring{C}_i$. Dann ist $\mathring{C}_{i+2} \setminus C_{i-1}$ eine offene Umgebung von p. Es gibt ein $\alpha \in A$ mit $p \in U_\alpha$. Setze $V'(p) := (\mathring{C}_{i+2} \setminus C_{i-1}) \cap U_\alpha$. Nach Verkleinern von $V'(p)$ zu $V''(p)$ kann man annehmen, dass $p \in V''(p) \subseteq V'(p)$ offener Definitionsbereich einer Karte ist. Genauer kann man $V''(p)$ so zu einer offenen Umgebung $W(p)$ verkleinern, dass gilt: $p \in W(p) \subseteq V''(p)$ ist offener Definitionsbereich einer Karte $x_p \colon W(p) \to J_3$ mit $x_p(p) = 0$. Wir wählen nun aus der Überdeckung

$$C_{i+1} \setminus \mathring{C}_i \subset \bigcup_{p \in C_{i+1} \setminus \mathring{C}_i} x_p^{-1}(J_1)$$

eine endliche Teilüberdeckung $x_{p_1^i}^{-1}(J_1) \cup \ldots \cup x_{p_{k_i}^i}^{-1}(J_1)$ aus. Setzen wir nun $B = \{(i,\rho) \mid i \in \mathbb{N}, \rho = 1, \ldots k_i\}$ und $(x_{i\rho}, W_{i\rho}) = (x_{p_\rho^i}, W(p_\rho^i))$ so haben wir in $(W_\beta)_{\beta\in B}$ offenbar eine Verfeinerung der gesuchten Art gefunden.

Zu (ii) Wir beweisen eine spezielle Version; die allgemeine Aussage von (ii) folgt dann trivial aus (iv). Wir überlegen uns an dieser Stelle nur folgende Aussage: Es gibt eine C^∞-Funktion $\psi \colon \mathbb{R}^n \to [0,1]$ mit $\psi|_{J_1} > 0$ und $\psi|_{\mathbb{R}^n \setminus J_2} = 0$. Für $t \in \mathbb{R}$ setzen wir:

$$\psi_1(t) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{(t+2)^2(t-2)^2}} & : t \in (-2,2) \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

Offenbar ist ψ_1 eine C^∞-Funktion. Setze nun $\psi(p) = \psi_1(p_1)\cdots\psi_1(p_n)$ für $p \in \mathbb{R}^n$. Offenbar ist ψ eine Lösung des spezielleren Problems.

Zu (iii) Wir definieren für $\beta \in B$ die Funktion $\tilde{\varphi}_\beta(p) := \psi \circ x_\beta$ für $p \in W_\beta$ und setzen $\tilde{\varphi}_\beta(p) = 0$ für $p \notin W_\beta$. Offenbar ist $\tilde{\varphi}_\beta \in C^\infty(M, \mathbb{R})$. Da $x_\beta^{-1}(J_1) \subset \operatorname{supp}(\tilde{\varphi}_\beta) \subseteq W_\beta$ gilt, ist $(\operatorname{supp}(\tilde{\varphi}_\beta))_{\beta\in B}$ eine lokal endliche Verfeinerung von $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$. Die Funktion

$$\bar{\varphi}_\beta(p) = \frac{\tilde{\varphi}_\beta(p)}{\sum_{\gamma\in B} \tilde{\varphi}_\gamma(p)} \text{ für } p \in M$$

ist wohldefiniert und eine C^∞-Funktion. Schließlich wählen wir noch für alle $\beta \in B$ ein $\alpha \in A$ mit $\operatorname{supp}(\bar{\varphi}_\beta(p)) \subseteq U_\alpha$. Dies definiert eine Abbildung $\lambda \colon B \to A$. Wir setzen nun

$$\varphi_\alpha(p) = \sum_{\beta \in \lambda^{-1}(\alpha)} \bar{\varphi}_\beta(p).$$

Da es sich dabei um eine lokalendliche Summe handelt, ist φ_α wieder C^∞ und man prüft trivial auch die anderen Eigenschaften nach.

Zu (iv) (a) Wähle gemäß Teil (iii) zur Überdeckung $G \cup (M \setminus A)$ Funktionen $\varphi_1, \varphi_2 \colon M \to [0,1]$ mit $\operatorname{supp}(\varphi_1) \subseteq G$ und $\operatorname{supp}(\varphi_2) \subseteq M \setminus A$. Offenbar hat φ_1 die gesuchten Eigenschaften.

(b) Multipliziere die Funktion f mit der Funktion φ_1 aus (i) und setze sie dann durch 0 fort.