Prof. Dr. B. Wilking
Dr. A. Wörner

WiSe 2011/12

8. Musterlösung zur Differentialgeometrie 1

Zu Aufgabe 8.1

Zu (i) Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass $\operatorname{diam}(Y) \geq \operatorname{diam}(X)$ gilt. Nun nehmen wir an, es gäbe ein $\varepsilon > 0$ mit $d_{GH}(X,Y) = \frac{1}{2}(\operatorname{diam}(Y) - \operatorname{diam}(X)) - \varepsilon$. Dann gibt es einen metrischen Raum (Z, d_Z) und isometrische Einbettungen $\iota_1 \colon X \to Z$, $\iota_2 \colon Y \to Z$ mit $d_H(\iota_1(X), \iota_2(Y)) \leq \frac{1}{2}(\operatorname{diam}(Y) - \operatorname{diam}(X)) - \frac{\varepsilon}{2}$. Sind nun $y_1, y_2 \in Y$ beliebig gegeben, so gibt es $x_1, x_2 \in X$ mit $d_Z(\iota_1(x_i), \iota_2(y_i)) \leq \frac{1}{2}(\operatorname{diam}(Y) - \operatorname{diam}(X) - \varepsilon)$, $i = 1, 2$. Es folgt:

$$\begin{aligned}
d(y_1, y_2) &= d(\iota_2(y_1), \iota_2(y_2)) \ \leq \ d(\iota_2(y_1), \iota_1(x_1)) + d(\iota_1(x_1), \iota_1(x_2)) + d(\iota_1(x_2), \iota_2(y_2)) \\
&\leq 2 \cdot \frac{1}{2}(\operatorname{diam}(Y) - \operatorname{diam}(X) - \varepsilon) + d(x_1, x_2) \\
&\leq \operatorname{diam}(Y) - \operatorname{diam}(X) - \varepsilon + \operatorname{diam}(X) \\
&= \operatorname{diam}(Y) - \varepsilon
\end{aligned}$$

Da $y_1, y_2 \in X$ beliebig waren, ist dies ein Widerspruch zur Definition von $\operatorname{diam}(Y)$.

Zu (ii) Wir nehmen zunächst an, dass $X_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} X$ bezüglich des Gromov–Hausdorff-Abstandes gilt. Da X endlich ist, können wir $\varepsilon := \frac{1}{3} \min\{d(x,y) \,|\, x, y \in X\}$ setzen. Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $d_{GH}(X_n, X) < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. Für jedes solche n gibt es also eine Metrik $\bar{d}$ auf $X_n \mathring{\cup} X$, die die Metriken von X_n und X fortsetzt und für die $d_H(X_n, X) < \varepsilon$ gilt. Insbesondere gilt $X_n \subseteq U_\varepsilon(X)$, und nach der Wahl von ε ist $U_\varepsilon(X) = \bigcup_{i=1}^N B_\varepsilon(x_i)$ eine disjunkte Vereinigung. Wir setzen $X_{n,i} := X_n \cap B_\varepsilon(x_i)$ für $i = 1, \ldots, N$ und erhalten eine disjunkte Vereinigung $X_n = \bigcup_{i=1}^N X_{n,i}$.

Nun ist klar, dass für jedes $i = 1, \ldots N$ gilt: $X_{n,i} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \{x_i\}$ bezüglich d_{GH}. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass für jeden beliebigen metrischen Raum Y gilt: $d_{GH}(Y, \{x_i\}) = \frac{1}{2}\operatorname{diam}(Y)$. Also ist $d_{GH}(X_{n,i}, \{x_i\}) = \frac{1}{2}\operatorname{diam}(X_{n,i})$, und es folgt $\operatorname{diam}(X_{n,i}) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Für alle i, j folgt nun auch leicht die Eigenschaft $\operatorname{dist}(X_{n,i}, X_{n,j}) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} d(x_i, x_j)$. Gäbe es etwa für feste i, j ein $\delta > 0$ derart, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ Punkte $z_{n,i} \in X_{n,i}$, $z_{n,j} \in X_{n,j}$ existieren mit $\bar{d}(z_{n,i}, z_{n,j}) \leq d(x_i, x_j) - \delta$, so erhält man einen Widerspruch für $\varepsilon < \frac{1}{2}\delta$. Analog argumentiert man für die umgekehrte Ungleichung.

Wir beweisen nun die umgekehrte Richtung. Ohne Einschränkung nehmen wir an, dass sich alle X_n als disjunkte Vereinigung von Mengen $X_{n,i}, i = 1, \ldots, N$ schreiben lassen, die die angegebenen Voraussetzungen erfüllen. Ist ein $\varepsilon > 0$ vorgegeben, so wählen wir $n_0 \in \mathbb{N}$ so groß, dass für alle i, j und alle $n \geq n_0$ gilt:

$$\operatorname{diam}(X_{n,i}) < \frac{1}{8}\varepsilon \qquad \text{und} \qquad |\operatorname{dist}(X_{n,i}, X_{n,j}) - d(x_i, x_j)| < \frac{1}{4}\varepsilon$$

Es sei $n \geq n_0$. Wir wählen beliebige Punkte $p_{n,i} \in X_{n,i}$ für $i = 1, \ldots, N$ und definieren die folgenden Funktionen:

$$f \colon X_n \to X,\ x \mapsto x_i \text{ falls } x \in X_{n,i} \qquad , \qquad g \colon X \to X_n,\ x_i \mapsto p_{n,i}$$

Nun seien $x \in X_{n,i}$, $y \in X_{n,j}$. Ist $i = j$, so gilt $d(x,y) \leq \operatorname{diam}(X_{n,i})$ und damit

$$|d(x,y) - d(f(x), f(y))| = |d(x,y) - 0| < \frac{1}{8}\varepsilon.$$

Ist $i \neq j$, so gilt einerseits

$$d(x,y) \geq \operatorname{dist}(X_{n,i}, X_{n,j}) > d(x_i, x_j) - \frac{1}{4}\varepsilon$$

und andererseits

$$d(x,y) \leq \operatorname{diam}(X_{n,i}) + \operatorname{dist}(X_{n,i}, X_{n,j}) + \operatorname{diam}(X_{n,j}) < \frac{1}{8}\varepsilon + d(x_i, x_j) + \frac{1}{4}\varepsilon + \frac{1}{8}\varepsilon < d(x_i, x_j) + \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Insgesamt folgt, dass

$$|d(f(x), f(y)) - d(x,y)| < \frac{1}{2}\varepsilon$$

gilt. Außerdem ist

$$d(x, g(f(x))) = d(x, p_{n,i}) \leq \operatorname{diam}(X_{n,i}) < \frac{1}{8}\varepsilon.$$

Nun seien $x, y \in X$. Man sieht, dass die Argumente von oben ebenso zeigen:

$$|d(g(x), g(y)) - d(x,y)| < \frac{1}{2}\varepsilon \qquad , \qquad d(f(g(x))) = 0$$

Damit gilt nach der Proposition der Vorlesung $d_{GH}(X_n, X) < \varepsilon$, und die Konvergenz ist gezeigt.

Zu Aufgabe 8.2

Offenbar sind die Bündelkarten Bijektionen. Genauer prüft man sofort, dass die Umkehrabbildung durch $\bar{x}^{-1}(p, \lambda) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial}{\partial x_i}\big|_{x^{-1}(p)}$ gegeben ist.

Für zwei Karten $x\colon U \to V$ und $y\colon U' \to V'$ aus $\mathfrak{A}$ ist der maximale Definitionsbereich der Kartenwechselabbildung $\bar{y} \circ \bar{x}^{-1}$ gleich $x(U \cap U') \times \mathbb{R}^n$ und somit offen. Ferner gilt:

$$\bar{y} \circ \bar{x}^{-1}(p\,,\,\lambda) = \left(y \circ x^{-1}(p)\,,\, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial}{\partial x_i}(y_1)\,,\,\ldots\,,\, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial}{\partial x_i}(y_n) \right)$$

Da $\frac{\partial}{\partial x_i}(y_j)(m) = \frac{\partial}{\partial x_i}(y_j \circ x^{-1})|_{x(m)}$ differenzierbar ist, sind die Kartenwechselabbildungen also Diffeomorphismen.

Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass $\mathfrak{A}$ vollständig ist. Dass durch die in der Aufgabe gegebene Definition tatsächlich eine Topologie definiert wird, folgt sofort aus der Tatsache, dass die Bündelkarten Bijektionen sind.

Man beachte zunächst, dass die Definitionsbereiche der Karten offen sind; dies folgt sofort aus der Tatsache, dass die Definitionbereiche der Kartenwechselabbildungen offen sind.

Als nächstes zeigen wir, dass die Karten Homöomorphismen sind. Sei also $x\colon U \to V$ eine Karte aus $\mathfrak{A}$ und $Z \subseteq V \times \mathbb{R}^n$. Per Definitionem folgt aus $\bar{x}^{-1}(Z)$ offen, dass Z offen ist, und somit ist $\bar{x}^{-1}$ stetig. Ist nun Z offen in $V \times \mathbb{R}^n$ und $y\colon U' \to V'$ eine weitere Karte, dann ist auch $Z \cap x(U' \cap U) \times \mathbb{R}^n$ offen. Da die Kartenwechselabbildungen Homöomorphismen sind, ist auch

$$\bar{y}(\bar{x}^{-1}(Z \cap (x(U' \cap U) \times \mathbb{R}^n))) = \bar{y}(\bar{x}^{-1}(Z) \cap \pi^{-1}(U'))$$

offen. Da y beliebig war, bedeutet dies, dass $\bar{x}^{-1}(Z)$ offen ist in TM.

Wir wollen nun beweisen, dass TM hausdorffsch ist. Sei also $v \neq w \in TM$. Sind v und w im Definitionsbereich einer Karte, so kann man v und w durch Umgebungen trennen, da die Karten Homöomorphismen sind. Sind v und w nicht im Defintionsbereich einer Karte, so gilt $\pi(v) \neq \pi(w)$. Dann gibt es disjunkte Kartenumgebungen $\pi(v) \in U$ und $\pi(w) \in U'$ in M mit zugehörigen Karten x und y. Offensichtlich sind dann aber auch die (offenen) Definitionsbereiche der Karten $\bar{x}$ und $\bar{y}$ disjunkt in TM.

Schließlich bleibt noch zu zeigen, dass TM eine abzählbare Topologie besitzt. Nach Voraussetzung besitzt M eine abzählbare Topologie und damit auch eine abzählbaren Atlas $\mathfrak{A}' \subseteq \mathfrak{A}$.

Dann ist aber $\bar{\mathfrak{A}}'$ ein abzählbarer Atlas für TM, und somit besitzt auch TM eine abzählbare Topologie.

Es sei $\mathfrak{B}$ ein Atlas für N und $\bar{\mathfrak{B}}$ der zugehörige Bündelatlas für TN. Außerdem sei $f\colon M \to N$ differenzierbar. Es sei $x\colon U \to V$ eine Karte in $\mathfrak{A}$ und $y\colon U' \to V'$ eine Karte in $\mathfrak{B}$. Dann gilt

$$\bar{y} \circ f_* \circ \bar{x}^{-1}(p,\lambda) := \left(y \circ f \circ x^{-1} \,,\, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial}{\partial x_i}(y_1 \circ f) \,,\, \dots \,,\, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial}{\partial x_i}(y_n \circ f) \right)$$

und damit ist f_* differenzierbar.

Zu Aufgabe 8.3

Es sei $p \in M$ und $x\colon U \to \mathbb{R}^n$ eine Karte um p mit $x(p) = 0$. Nach der Definition von $T_p^{\mathrm{geom}}M = \mathcal{K}_p(M)/\sim$ ist durch

$$\varphi\colon T_p^{\mathrm{geom}}M \to \mathbb{R}^n \,,\; [\alpha] \mapsto (x \circ \alpha)'(0)$$

eine wohldefinierte und injektive Abbildung gegeben. Ist ein $v \in \mathbb{R}^n$ gegeben, so definiert $t \mapsto x^{-1}(tv)$ eine Kurve in $\mathcal{K}_p$, und es gilt:

$$\frac{d}{dt}\big(t \mapsto (x \circ x^{-1})(tv)\big)\Big|_{t=0} = v$$

Somit ist φ auch surjektiv. Durch die Bijektion φ definieren wir nun kanonisch eine Vektorraumstruktur auf $T_p^{\mathrm{geom}}M$ durch

$$a \cdot [\alpha] + b \cdot [\beta] := \varphi^{-1}\big(a \cdot \varphi([\alpha]) + b \cdot \varphi([\beta])\big) \quad , \; a, b \in \mathbb{R} \,,\; [\alpha], [\beta] \in T_p^{\mathrm{geom}}M$$

und erhalten $T_p^{\mathrm{geom}}M$ als zu $\mathbb{R}^n$ isomorph.

Nun sei $k = \infty$. Weiter seien $[\alpha] \in T_p^{\mathrm{geom}}M$ und $f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ sowie $a, b \in \mathbb{R}$. Ist ein β gegeben mit $[\beta] = [\alpha]$, so gilt

$$\begin{aligned} (f \circ \alpha)'(0) &= (f \circ x^{-1} \circ x \circ \alpha)'(0) \;=\; (f \circ x^{-1})'(x(p)) \cdot (x \circ \alpha)'(0) \\ &= (f \circ x^{-1})'(x(p)) \cdot (x \circ \beta)'(0) \;=\; (f \circ \beta)'(0) \end{aligned}$$

und damit ist die Abbildung $f \mapsto (f \circ \alpha)'(0)$ wohldefiniert. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} ((af + bg) \circ \alpha)'(0) &= a(f \circ \alpha)'(0) + b(g \circ \alpha)'(0) \\ ((fg) \circ \alpha)'(0) &= ((f \circ \alpha)(g \circ \alpha))'(0) \;=\; (f \circ \alpha)'(0) \cdot g(p) + (g \circ \alpha)'(0) \cdot f(p) \end{aligned}$$

und somit ist $f \mapsto (f \circ \alpha)'(0)$ eine Derivation. Aus

$$(f \circ \alpha)'(0) \;=\; (f \circ x^{-1})'(x(p)) \cdot (x \circ \alpha)'(0) \;=\; (f \circ x^{-1})'(x(p)) \cdot \varphi([\alpha])$$

folgt sofort, dass $[\alpha] \mapsto \big(f \mapsto (f \circ \alpha)'(0)\big)$ eine lineare Abbildung $T_p^{\mathrm{geom}}M \to T_pM$ ist. Ebenso folgt, dass diese Abbildung trivialen Kern hat; dazu setze man als Funktion f die Komponentenfunktionen der Kartenabbildung x ein. Wegen $n = \dim T_p^{\mathrm{geom}}M = \dim T_pM$ ist die Abbildung auch surjektiv und mithin ein Isomorphismus.