Prof. Dr. B. Wilking
Dr. A. Wörner WiSe 2011/12

9. Musterlösung zur Differentialgeometrie 1

Zu Aufgabe 9.1

Zu (i) Für alle $Y \in \mathfrak{V}(\mathbb{R}^n)$ gilt $\partial_Y e_1 = 0$. Somit folgt $[e_1, Y] = \partial_{e_1} Y$. Sei $Y_p = \sum_{i=1}^n \eta_i(p) e_i$. Dann gilt $[e_1, Y] = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \eta_i}{\partial x_1} e_i = 0$ genau dann, wenn $\frac{\partial \eta_i}{\partial x_1} = 0$ für alle i gilt, also genau dann, wenn die η_i von x_1 unabhängig sind. Somit folgt:

$$\{Y \in \mathfrak{V}(\mathbb{R}^n) \,|\, [e_1, Y] = 0\} = \left\{ x \mapsto \sum_{i=1}^n \eta_i(x_2, \ldots, x_n) e_i \,\middle|\, \eta_i \in C^\infty(\mathbb{R}^{n-1}, \mathbb{R}) \right\}$$

Zu (ii) Es gilt $X_{(x_1,x_2)} = \left(\frac{x_1}{\|x\|}, \frac{x_2}{\|x\|}\right) =: (\zeta_1(x_1, x_2), \zeta_2(x_1, x_2))$ und $Y_{(x_1,x_2)} = (x_2, -x_1) =: (\eta_1(x_1, x_2), \eta_2(x_1, x_2))$. Damit ist $\operatorname{grad}(\zeta_1) = \left(\frac{1}{\|x\|} - \frac{x_1^2}{\|x\|^3}, -\frac{x_1 x_2}{\|x\|^3}\right)$ und somit $Y\zeta_1 = \frac{x_2}{\|x\|}$. Entsprechend sieht man $Y\zeta_2 = \frac{-x_1}{\|x\|}$. Weiterhin gilt $\operatorname{grad}(\eta_1) = (0, 1)$ und $\operatorname{grad}(\eta_2) = (-1, 0)$. Folglich ist $X\eta_1 = \frac{x_2}{\|x\|}$ und $X\eta_2 = \frac{-x_1}{\|x\|}$. Insgesamt folgt

$$[X, Y] = \begin{pmatrix} X\eta_1 - Y\zeta_1 \\ X\eta_2 - Y\zeta_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Zu (iii) Man betrachte den Diffeomorphismus $\Phi\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $(x_1, x_2) \mapsto (ax_1, bx_2)$. Es seien $\tilde{X}, \tilde{Y}$ die Vektorfelder aus (ii), also $\tilde{X}_x = \frac{x}{\|x\|}$ und $\tilde{Y}_{(x_1,x_2)} = (x_2, -x_1)$. Es gilt nun $\Phi_{*x}(\tilde{X}_x) = \frac{(ax_1, bx_2)}{\sqrt{(ax_1/a)^2 + (bx_2/b)^2}} = X_{\Phi(x)}$. Setzen wir nun $Y_{(x_1,x_2)} := \left(\frac{a}{b} x_2, -\frac{b}{a} x_1\right)$ so folgt $\Phi_{*x}(\tilde{Y}_x) = (ax_2, -bx_1) = Y_{\Phi(x)}$. Da Φ ein Diffeomorphismus ist, folgt sofort, dass X und Y punktweise linear unabhängig sind. Außerdem sind $X, \tilde{X}$ sowie $Y, \tilde{Y}$ nach Definition Φ-verwandt, und damit gilt dies auch für deren Lieklammern. Es folgt $[X, Y]_{\Phi(p)} = \Phi_{*p}[\tilde{X}, \tilde{Y}]_p = \Phi_{*p} 0_p = 0$.

Zu Aufgabe 9.2

Zunächst stellen wir fest, dass Φ tatsächlich ein Diffeomorphismus ist, indem wir Φ^{-1} wie folgt angeben:

$$\Phi^{-1}\colon M \to \mathbb{R}^n, \ (z_1, \ldots, z_{n+1}) \mapsto \frac{1}{1 - z_{n+1}} (z_1, \ldots, z_n)$$

Nun kann man nachrechnen, dass es sich tatsächlich um die Umkehrabbildung handelt. Offensichtlich sind Φ und Φ^{-1} unendlich oft differenzierbar. Damit handelt es sich bei Φ^{-1} um eine Karte und entsprechend bei Φ um eine Parametrisierung. Das Euklidische Skalarprodukt ist im $\mathbb{R}^{n+1}$ konstant, hängt also trivialerweise glatt vom Basispunkt ab. Somit ist klar, dass durch (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit gegeben ist.

Wir berechnen nun die Matrix von g. Es sei $x \in \mathbb{R}^n$ und $i \in \{1, \ldots, n\}$. Dann gilt:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(x) = -\frac{2x_i}{(\|x\|^2 + 1)^2} (2x, \|x\|^2 - 1) + \frac{1}{\|x\|^2 + 1} (2e_i + 2x_i e_{n+1})$$

Damit ergibt sich für $i, j \in \{1, \ldots, n\}$:

$$\begin{aligned}
g_{ij} &= \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(x), \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}(x) \right\rangle \\
&= \frac{4x_i x_j}{(\|x\|^2+1)^4}(4\|x\|^2 + \|x^4\| - 2\|x\|^2 + 1) + \frac{4\delta_{ij} + 4x_i x_j}{(\|x\|^2+1)^2} \\
&\quad - \frac{4}{(\|x\|^2+1)^3}(2x_i x_j + x_i x_j(\|x\|^2 - 1) + 2x_i x_j + x_j x_i(\|x\|^2 - 1)) \\
&= \frac{8x_i x_j + 4\delta_{ij}}{(\|x\|^2+1)^2} - \frac{8x_i x_j}{(\|x\|^2+1)^2} \\
&= \frac{4\delta_{ij}}{(\|x\|^2+1)^2}
\end{aligned}$$

Dabei ist δ_{ij} das Kronecker-Symbol: $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & : i = j \\ 0 & : i \neq j \end{cases}$

Zu Aufgabe 9.3

Siehe z. B. Kapitel 5, Theorem 12 in Peter Petersen, “Riemannian Geometry”, second edition, Graduate Texts in Mathematics (171), Springer, New York, 2006

Zu Aufgabe 9.4

Da M als Mannigfaltigkeit lokal homöomorph zu $\mathbb{R}^n$ ist, ist M insbesondere lokalkompakt und nach Definition auch hausdorffsch und besitzt eine abzählbare Basis der Topologie. Also lässt sich Aufgabe 7.1 (ii) anwenden und liefert die Existenz einer kompakten Ausschöpfung $C_i, i \in \mathbb{N}$ mit $C_i \subseteq \mathring{C}_{i+1}$ und $\bigcup_i C_i = M$. Für alle $i \in \mathbb{N}$ setzen wir $\varepsilon_i := \operatorname{dist}(C_i, \partial C_{i+1}) = \inf\{d_{\text{Riem}}(x,y) \,|\, x \in C_i\,,\, y \in \partial C_{i+1}\}$. Aufgrund der Kompaktheit der Mengen C_i ist klar, dass $\varepsilon_i > 0$ gilt für alle i, denn sonst wäre $C_i \cap \partial C_{i+1} \neq \varnothing$ und damit $C_i \not\subseteq \mathring{C}_{i+1}$.

Gemäß Aufgabe 7.2 können wir nun C^∞-Funktionen $f_k, k \in \mathbb{N}$ mit den folgenden Eigenschaften finden:

$$f_k \colon M \to \mathbb{R}\,,\ f_k\Big|_{\overline{C_k \setminus C_{k-1}}} = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\varepsilon_i^2}\,,\ \operatorname{supp} f_k \subseteq (C_{k+1} \mathbin{\mathring{\setminus}} C_{k-2})$$

Hierbei setzen wir $C_{-1} = C_0 = \varnothing$. Es ist nun klar, dass $f := \sum_{k\in\mathbb{N}} f_k$ eine wohldefinierte C^∞-Funktion ist mit $f|_{M\setminus C_k} \geq \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\varepsilon_i^2}$.

Wir setzen $\tilde{g}_p := f(p) \cdot g_p$. Es ist klar, dass $\tilde{g}$ eine Riemannsche Metrik ist. Zu zeigen bleibt die Vollständigkeit von $(M, \tilde{g}, d_{\text{Riem}})$. Dazu sei $(p_i) \subseteq M$ eine Cauchy-Folge bezüglich d_{Riem}, wobei d_{Riem} von $\tilde{g}$ induziert ist. Wie in Aufgabe 9.3 gezeigt wurde, induziert d_{Riem} dieselbe Topologie wie zuvor, also sind die Mengen C_i auch bezüglich d_{Riem} kompakt. Gibt es also ein $k \in \mathbb{N}$ mit $p_i \in C_k$ für alle i, dann besitzt die Folge (p_i) einen Grenzwert $p \in C_k \subseteq M$.

Nehmen wir nun an, es gäbe solch ein k nicht. Wegen der aufsteigenden Kette $C_i \subseteq C_{i+1}$ muss es dann zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein i_k geben mit $p_{i_k} \in C_k$.

Es seien $p \in C_k \setminus C_{k-1}$ und $q \in C_{\ell+2} \setminus C_{\ell+1}$, wobei $\ell \geq k$ ist. Dann gilt offensichtlich (man beachte, dass d_{Riem} jetzt den neuen Riemannschen Abstand bezeichnet):

$$d_{\text{Riem}}(p,q) \geq \sum_{i=k}^{\ell} \inf\{d_{\text{Riem}}(x,y) \,|\, x \in C_i\,,\, y \in \partial C_{i+1}\} \geq \sum_{i=k}^{\ell} \left(\varepsilon_i \cdot \sum_{j=1}^{i+1} \frac{1}{\varepsilon_j^2} \right) \qquad (*)$$

Wir unterscheiden nun 2 Fälle je nachdem, ob (ε_i) eine Nullfolge ist oder nicht.

Ist es keine Nullfolge, so gibt es ein $\varepsilon > 0$ derart, dass für jedes $N \in \mathbb{N}$ ein Index $n \geq N$ existiert mit $\varepsilon_n > \varepsilon$. Die Abschätzung $(*)$ lässt sich dann wie folgt fortführen:

$$d_{\text{Riem}}(p,q) \quad \geq \quad \sum_{i=k}^{\ell} \left(\varepsilon_i \cdot \sum_{j=1}^{i+1} \frac{1}{\varepsilon_j^2} \right) \;\geq\; \sum_{i=k}^{\ell} \left(\varepsilon_i \cdot \sum_{j=1}^{k+1} \frac{1}{\varepsilon_j^2} \right) \;=\; \left(\sum_{i=k}^{\ell} \varepsilon_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{k+1} \frac{1}{\varepsilon_j^2} \right)$$

Nun seien p und q Glieder unserer Cauchyfolge. Wie oben gesehen, können wir solche für beliebig groß gegebene k, ℓ finden. Da $\sum_{j=1}^{k+1} \frac{1}{\varepsilon_j^2}$ die feste untere Schranke $\frac{1}{\varepsilon_1^2}$ besitzt und durch die Wahl von ℓ der Wert von $\sum_{i=k}^{\ell} \varepsilon_i$ über jede beliebige Schranke gebracht werden kann, gilt dies auch für $d_{\mathrm{Riem}}(p,q)$. Dann kann jedoch keine Cauchyfolge vorliegen.

Nehmen wir an, dass (ε_i) eine Nullfolge ist, so liefert bereits die Abschätzung

$$d_{\mathrm{Riem}}(p,q) \;\geq\; \sum_{i=k}^{\ell} \left(\varepsilon_i \cdot \sum_{j=1}^{i+1} \frac{1}{\varepsilon_j^2} \right) \;\geq\; \sum_{i=k}^{\ell} \left(\varepsilon_i \cdot \frac{1}{\varepsilon_i^2} \right) \;=\; \sum_{i=k}^{\ell} \frac{1}{\varepsilon_i}$$

einen Ausdruck, der für jedes k durch die Wahl von ℓ genügend groß über jede Schranke gebracht werden kann. Wie oben ist dies ein Widerspruch.

Also bleibt tatsächlich jede Cauchyfolge in einem Kompaktum C_k und konvergiert folglich dort. Somit ist $(M, \tilde{g}, d_{\mathrm{Riem}})$ vollständig.