

Skript zur Vorlesung

# Elementare Differentialgeometrie

SS 2011

Prof. Dr. B. Wilking

Mathematisches Institut  
Fachbereich Mathematik und Informatik  
WWU Münster

Das Skript basiert zum Teil auf einer etwas anderen älteren Vorlesung,  
die von Dorothea Jansen ge $\text{\TeX}$ t wurde

# Inhaltsverzeichnis

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Kurven</b>   | <b>3</b>  |
| 1        | Kurven . . . . .  | 3         |
| 2        | Kurven auf Sphären und Totalkrümmung von Kurven . . . . .     | 9         |
| 3        | Ebene Kurven . . . . .  | 15        |
| 4        | Fundamentalsatz der Algebra – ein Beweis mittels Umlaufzahlen | 27        |
| <b>2</b> | <b>Flächen konstanter Krümmung</b>                            | <b>29</b> |
| 5        | Euklidische Geometrie . . . . .                               | 29        |
| 6        | Zur Geometrie der Sphäre . . . . .                            | 31        |
| 7        | Die Hyperbolische Ebene . . . . .                             | 35        |
| <b>3</b> | <b>Flächentheorie</b>   | <b>55</b> |
| 8        | Flächen . . . . .   | 55        |
| 9        | Zweite Fundamentalform und Krümmungen von Flächen. . . . .    | 57        |

# Kapitel 1

## Kurven

### 1 Kurven

**Definition 1.1.** Sei  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine  $C^1$ -Kurve.

- a)  $c$  heißt *regulär*, falls  $\|\dot{c}(t)\| \neq 0$  für alle  $t \in [a, b]$ .
- b)  $c$  heißt *wegparametrisiert*, falls  $\|\dot{c}(t)\| = 1$  für alle  $t \in [a, b]$ .
- c)  $c$  heißt *geschlossen*, falls  $c(a) = c(b)$ .
- d)  $c$  heißt *differenzierbar geschlossen*, falls  $c(a) = c(b)$  und  $\dot{c}(a) = \dot{c}(b)$ .

**Satz 1.2.** Ist  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine reguläre  $C^k$ -Kurve, so gibt es ein  $l \in \mathbb{R}^+$  und einen  $C^k$ -Diffeomorphismus  $\varphi : [0, l] \rightarrow [a, b]$ , so dass  $\tilde{c} := c \circ \varphi$  wegparametrisiert ist.

BEWEIS. Die Abbildung

$$\psi : [a, b] \rightarrow [0, l], s \mapsto \int_a^s \|\dot{c}(t)\| dt$$

ist  $C^k$ . Es gilt  $\psi' > 0$ . Definiere  $\varphi := \psi^{-1}$ . Dann folgt

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{\dot{\psi}(\varphi(t))}.$$

Weiter ist

$$\left\| \frac{\partial}{\partial s} \psi(s) \right\| = \left\| \frac{\partial}{\partial s} \int_a^s \|\dot{c}(t)\| dt \right\| = \|\dot{c}(s)\|.$$

Zusammen folgt

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial}{\partial t} (c \circ \varphi)(t) \right\| &= \|\dot{c}(\varphi(t))\| \cdot \|\dot{\varphi}(t)\| \\ &= \|\dot{\psi}(\varphi(t))\| \cdot \frac{1}{\|\dot{\psi}(\varphi(t))\|} \\ &= 1. \end{aligned}$$

$\tilde{c}$  ist also weparametrisiert. □

**Definition 1.3.** a) Sei  $c$  eine reguläre  $C^1$ -Kurve. Dann heißt  $T(t) := \frac{\dot{c}(t)}{\|\dot{c}(t)\|}$  das *Einheitstangentialfeld* von  $c$ .

b) Sei  $c$  eine reguläre  $C^2$ -Kurve. Dann heißt  $\kappa(t) := \frac{\|T'(t)\|}{\|\dot{c}(t)\|}$  die *Krümmung* von  $c$  in  $t$ .

Ist  $c$  eine weparametrisierte Kurve, so gilt  $\kappa(t) = \|\ddot{c}(t)\|$ .

**Beispiel** (Kreislinie). Sei  $t \in \mathbb{R}$  und  $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

$$\begin{aligned} c(t) &= r \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \\ \dot{c}(t) &= r \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}, \\ \|\dot{c}(t)\| &= r, \\ T(t) &= \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}, \\ T'(t) &= \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix}, \\ \|T'(t)\| &= 1, \\ \kappa(t) &= \frac{1}{r}. \end{aligned}$$

**Beispiel** (Helix).

$$\begin{aligned} c(t) &= \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix}, \\ \dot{c}(t) &= \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 1 \end{pmatrix}, \\ T(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \kappa(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (\sqrt{2})^{-1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

**Bemerkung 1.4** (Krümmung regulärer Kurven). *Sei  $c$  eine reguläre Kurve. Dann gilt wegen*

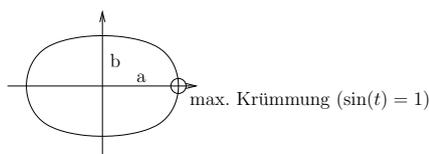
$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \|\dot{c}(t)\| &= \frac{\partial}{\partial t} (\langle \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot (\langle \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle)^{-\frac{1}{2}} \cdot (\langle \ddot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle + \langle \dot{c}(t), \ddot{c}(t) \rangle) \\ &= \frac{\langle \ddot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle}{\|\dot{c}(t)\|} \end{aligned}$$

für die Krümmung

$$\begin{aligned} \kappa(t) &= \frac{\left\| \left( \frac{\dot{c}(t)}{\|\dot{c}(t)\|} \right)' \right\|}{\|\dot{c}(t)\|} \\ &= \frac{\left\| \frac{\ddot{c}(t)}{\|\dot{c}(t)\|} - \frac{\dot{c}(t) \langle \dot{c}(t), \ddot{c}(t) \rangle}{\|\dot{c}(t)\|^3} \right\|}{\|\dot{c}(t)\|} \\ &= \frac{\|\ddot{c}(t) - \frac{\dot{c}(t)}{\|\dot{c}(t)\|} \langle \frac{\dot{c}(t)}{\|\dot{c}(t)\|}, \ddot{c}(t) \rangle\|}{\|\dot{c}(t)\|^2} \\ &= \frac{\|\ddot{c}(t) - T(t) \langle T(t), \ddot{c}(t) \rangle\|}{\|\dot{c}(t)\|^2} \\ &= \frac{\|(\ddot{c}(t))^\perp\|}{\|\dot{c}(t)\|^2}. \end{aligned}$$

**Beispiel** (Ellipse). Sei  $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} c(t) &= (a \cdot \cos(t), b \cdot \sin(t)), \\ \dot{c}(t) &= (-a \cdot \sin(t), b \cdot \cos(t)), \\ \ddot{c}(t) &= (-a \cdot \cos(t), -b \cdot \sin(t)). \end{aligned}$$



Die Matrix

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

beschreibt eine Drehung um  $90^\circ$  nach links. Definiere

$$s(t) := \frac{J \dot{c}(t)}{\|J \dot{c}(t)\|}$$

und somit ist

$$\begin{aligned} \ddot{c}(t) &= \langle \ddot{c}(t), T(t) \rangle T(t) + \langle \ddot{c}(t), \|s(t)\| \rangle \|s(t)\| \\ &= \ddot{c}^\top(t) + \ddot{c}^\perp(t), \end{aligned}$$

da  $T(t) = \frac{\dot{c}(t)}{\|\dot{c}(t)\|}$  und  $s(t)$  eine ONB bilden. Es folgt also

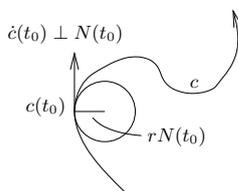
$$\|\ddot{c}^\perp(t)\| = \langle \ddot{c}(t), T(t) \rangle T(t) + \langle \ddot{c}(t), \|s(t)\| \rangle = \langle \ddot{c}(t), \|s(t)\| \rangle$$

Damit gilt nun für die Krümmung

$$\begin{aligned} \kappa(t) &= \frac{\|(\ddot{c}(t))^\perp\|}{\|\dot{c}(t)\|^2} = \frac{\langle \ddot{c}(t), J \dot{c}(t) \rangle}{\|\dot{c}(t)\|^2 \cdot \|J \dot{c}(t)\|} \\ &= -\frac{ab}{\|\dot{c}(t)\|^3} = -\frac{ab}{(a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t))^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

**Definition und Lemma 1.5.** Sei  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine reguläre  $C^2$ -Kurve mit  $\kappa(t_0) \neq 0$ .

- a) Sei  $\|T'(t_0)\| \neq 0$ . Dann heißt  $N(t_0) := \frac{T'(t_0)}{\|T'(t_0)\|}$  das Einheitsnormalenfeld von  $c$  in  $t_0$ . Es gilt  $N(t_0) \perp T(t_0)$ .
- b)  $m(t_0) := c(t_0) + \frac{1}{\kappa(t_0)} N(t_0)$  heißt Krümmungsmittelpunkt von  $c$  in  $t_0$ . Die Kurve  $t \mapsto m(t)$  heißt Evolute von  $c$ .
- c) Sei  $r := \frac{1}{\kappa(t_0)}$ .  $B_r(m(t_0))$  heißt Krümmungskugel von  $c$  in  $t_0$ .



BEWEIS. Es gilt

$$1 = \langle T(t), T(t) \rangle.$$

Durch Differenzieren erhält man

$$0 = 2 \langle T'(t), T(t) \rangle$$

und damit

$$T'(t) \perp T(t).$$

und

$$N(t) \perp T(t).$$

□

**Proposition 1.6.** Sei  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine reguläre  $C^2$ -Kurve, sei  $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$  ein  $C^2$ -Diffeomorphismus, und sei  $\tilde{c} := c \circ \varphi$ . Dann gilt  $\kappa_{\tilde{c}}(t) = \kappa_c(\varphi(t))$  für alle  $t \in \mathbb{R}^n$ .

BEWEIS. Ohne Einschränkung sei  $\varphi' > 0$ . Es gilt

$$\dot{\tilde{c}}(t) = \varphi'(t) \cdot \dot{c}(\varphi(t))$$

Wegen

$$\varphi'(t) = \|\varphi'(t)\|$$

ist dann

$$\tilde{T}(t) = \frac{\dot{\tilde{c}}(t)}{\|\dot{\tilde{c}}(t)\|} = \frac{\varphi'(t) \cdot \dot{c}(\varphi(t))}{\|\varphi'(t) \cdot \dot{c}(\varphi(t))\|} = \frac{\dot{c}(\varphi(t))}{\|\dot{c}(\varphi(t))\|} = T(\varphi(t))$$

und weiter

$$\kappa_{\tilde{c}}(t) = \frac{\tilde{T}'(t)}{\|\dot{\tilde{c}}(t)\|} = \frac{\|\varphi'(t) \cdot T'(\varphi(t))\|}{\varphi'(t) \cdot \|\dot{c}(\varphi(t))\|} = \frac{\|T'(\varphi(t))\|}{\|\dot{c}(\varphi(t))\|} = \kappa_c(\varphi(t))$$

Es folgt die Aussage des Satzes. □

**Satz 1.7.** Sei  $c$  eine reguläre  $C^2$ -Kurve mit  $\ddot{c}(t_0) \neq 0$ . Dann ist  $m(t_0) \in \mathbb{R}^n$  der eindeutig bestimmte Punkt mit

$$d(m(t_0), c(t)) = \frac{1}{\kappa(t_0)} + o(|t - t_0|^2),$$

wobei wie üblich  $o(|t - t_0|^2)$  für eine Funktion steht mit  $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{o(|t - t_0|^2)}{(t - t_0)^2} = 0$ .

BEWEIS. Ohne Einschränkung sei  $\|\dot{c}(t)\| = 1$ . Nach Verschiebung ist  $m(t_0) = 0$ . Nach Definition von  $N$  und  $T$  ergibt sich

$$N(t_0) = \frac{\ddot{c}(t_0)}{\|\ddot{c}(t_0)\|}.$$

Da  $m(t_0) = 0$ , gilt

$$c(t_0) = -\frac{1}{\kappa(t_0)} \cdot N(t_0).$$

Definiere nun

$$h(t_0 + t) := \frac{1}{\kappa(t_0)} \cdot (-\cos(t \cdot \kappa(t_0)) \cdot N(t_0) + \sin(t \cdot \kappa(t_0)) \cdot T(t_0)).$$

Dies parametrisiert eine Kreislinie, da  $N(t) \perp T(t)$  (bekannt aus 1.4). Für diese Abbildung gilt nun (nachrechnen):

$$\begin{aligned} h(t_0) &= c(t_0) \\ h'(t_0) &= T(t_0) = \dot{c}(t_0) \\ h''(t_0) &= \kappa(t_0) \cdot N(t_0) = \ddot{c}(t_0). \end{aligned}$$

Es folgt nun nach dem Satz von Taylor aus Analysis 1:

$$d(h(t), c(t)) = o((t - t_0)^2).$$

Kombinieren wir dies mit  $d(0, h(t)) = \frac{1}{\kappa(t_0)}$  so liefert zweimaliges Anwenden der Dreiecksungleichung

$$\frac{1}{\kappa(t_0)} - o(|t - t_0|^2) \leq d(0, c(t)) \leq \frac{1}{\kappa(t_0)} + o(|t - t_0|^2)$$

und somit wie behauptet  $d(0, c(t)) - \frac{1}{\kappa(t_0)} = o(|t - t_0|^2)$ .

Es verbleibt die Eindeutigkeit zu verifizieren. Sei  $p$  ein weiterer Punkt (neben dem Ursprung) mit  $d(p, c(t)) - \frac{1}{\kappa(t_0)} = o(|t - t_0|^2)$ . Wir betrachten die  $C^2$  Funktion

$$f(t) = d(p, c(t)) - d(0, c(t))^2 = \|p - c(t)\|^2 - \|c(t)\|^2.$$

Es gilt  $f'(t_0) = f''(t_0) = 0$ , da nach Voraussetzung beide Summanden verschwindende Ableitungen (in  $t_0$ ) bis zur zweiten Ordnung haben. Andererseits liefert das Berechnen dieser Ableitungen  $\langle c'(t_0), p \rangle = \langle c''(t_0), p \rangle = 0$ . Somit liegt  $p$  also senkrecht zu der Ebene, die von  $c'(t_0)$  und  $c''(t_0)$  aufgespannt wird. Da diese Ebene den Punkt  $c(t_0) = -\frac{1}{\kappa(t_0)}N(t_0)$  enthält, folgt mit dem Satz von Pythagoras

$$\begin{aligned} \frac{1}{\kappa(t_0)^2} &= \|c(t_0) - p\|^2 = \|c(t_0)\|^2 + \|p\|^2 \\ &= \frac{1}{\kappa(t_0)^2} + \|p\|^2 \end{aligned}$$

und also  $p = 0$ . □

## 2 Kurven auf Sphären und Totalkrümmung von Kurven

Im folgenden ist  $\mathbb{S}^n$  die Einheitssphäre. Also

$$\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}.$$

**Satz 2.1.** Sei  $c : [0, b] \rightarrow \mathbb{S}^n$  eine stückweise  $C^1$ -Kurve. Dann gilt  $L(c) \geq \sphericalangle(c(0), c(b)) \in [0, \pi]$  mit Gleichheit genau dann, wenn  $c$  einen Teil eines minimalen Großkreisstückes von  $c(0)$  nach  $c(b)$  monoton parametrisiert.

BEWEIS. Ohne Einschränkung sei  $c(0) = e_1$ . (Sonst wähle ein  $A \in O(n+1)$  mit  $A \cdot c(0) = e_1$ ). Definiere

$$f := \sphericalangle(e_1, \cdot) : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \sphericalangle(e_1, x) = \arccos\left(\frac{\langle e_1, x \rangle}{\|x\|}\right) = \arccos\left(\frac{x_1}{\|x\|}\right)$$

$f$  ist stetig und auf  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbb{R} \cdot e_1$  stetig differenzierbar.

**Behauptung.** Für  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x' \end{pmatrix}$  mit  $x_1 \in \mathbb{R}$  und  $x' \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  gilt

$$\text{grad } f \begin{pmatrix} x_1 \\ x' \end{pmatrix} = \frac{1}{\|x\|} \begin{pmatrix} -\|x'\| \\ \frac{x_1}{\|x'\|} x' \end{pmatrix}.$$

Insbesondere  $\text{grad } f(x) = \frac{1}{\|x\|}$ .

Aus der Analysis II ist bekannt, dass für  $v \in \mathbb{R}^n$  folgendes gilt

$$\langle \text{grad } f(x), v \rangle = \frac{d}{dt}_{t=0} f(x + tv).$$

Mittels dieser Formel verifiziert man nun leicht

- a)  $\langle \text{grad } f(x), x \rangle = 0$ ,
- b)  $\langle \text{grad } f(x), v \rangle = 0$  für alle  $v$  mit  $\langle v, e_1 \rangle = \langle v, x \rangle = 0$ .

Mithin liegt  $\text{grad } f(x)$  in dem zweidimensionalen Untervektorraum  $\text{span}_{\mathbb{R}}(e_1, x)$  und ist senkrecht zu  $x$ .

Damit ist klar, dass  $\text{grad}(f)(x)$  ein Vielfaches von  $\frac{1}{\|x\|} \begin{pmatrix} -\|x'\| \\ \frac{x_1}{\|x'\|} x' \end{pmatrix}$  ist.

Schließlich betrachten wir noch die Kurve

$$\gamma(t) = \|x\| \cos(t) e_1 + \frac{\|x\|}{\|x'\|} \sin(t) \begin{pmatrix} 0 \\ x' \end{pmatrix}.$$

Diese beschreibt offenbar eine Kreislinie mit Radius  $\|x\|$  um den Ursprung. Es gilt  $f(\gamma(t)) = t$  und  $\gamma(f(x)) = x$ .

Ähnlich wie oben folgt aus Analysis II:

$$\langle \text{grad}(f(\gamma(t_0))), \gamma'(t_0) \rangle = \frac{d}{dt}_{t=t_0} f(c(t)) = 1.$$

Die bisherigen Überlegungen zeigen ferner, dass  $\text{grad}(f(\gamma(t_0)))$  und  $\gamma'(t)$  linear abhängig sind.

Insgesamt folgt also:

$$\text{grad } f(\gamma(t)) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|^2}$$

Auswerten an der Stelle  $t = f(x)$  liefert nun die Behauptung.

Wir fahren nun mit dem Beweis des Satzes fort. Wir können ohne Einschränkung  $c(t) \neq e_1 = c(0)$  für alle  $t \in (0, b]$  annehmen. Setze

$$\tilde{b} := \begin{cases} b & \text{falls } c(t) \neq -e_1 \text{ für alle } t \in (0, b) \\ \min\{t \mid c(t) = -e_1\} & \text{sonst} \end{cases}$$

Es gilt dann nach Konstruktion  $c(t) \neq \pm e_1$  für  $t \in (0, \tilde{b})$ .

Wir betrachten nun die Funktion  $h(t) = f(c(t))$  auf  $[0, \tilde{b}]$ . Es gilt:  $h$  ist stetig auf  $[0, \tilde{b}]$  und stetig differenzierbar auf  $(0, \tilde{b})$ . Weiterhin gilt

$$h'(t) = \langle c'(t), \text{grad } f(c(t)) \rangle \stackrel{\text{CSU}}{\leq} \|c'(t)\| \|\text{grad}(f)(c(t))\| = \|c'(t)\|.$$

Aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt nun

$$\begin{aligned} \triangleleft(c(0), c(b)) &\leq \triangleleft(c(0), c(\tilde{b})) \\ &= h(\tilde{b}) = \int_0^{\tilde{b}} h'(t) dt \\ &\leq \int_0^{\tilde{b}} \|c'(t)\| dt \\ &= L(c_{[0, \tilde{b}]}) \leq L(c). \end{aligned}$$

Dies ist die behauptete Ungleichung.

Im Folgenden setzen wir  $L(c) = \triangleleft(c(0), c(b))$  voraus. Wir können dann  $b = \tilde{b}$  annehmen, da die Gleichheit insbesondere  $L(c_{[\tilde{b}, b]}) = 0$  impliziert.

Weitherhin muss in der obigen Cauchy-Schwarzschen Ungleichung überall Gleichheit gelten. Mithin gilt

$$c'(t) = \|c'(t)\| \text{grad } f(c(t)). \quad (1.1)$$

Wir nehmen nun eine Fallunterscheidung vor.

*Fall 1.* Es gelte  $c(b) \neq -e_1$ . Wir betrachten die Funktion

$$\begin{aligned} g &:= \sphericalangle(c(b), \cdot) : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \\ x &\mapsto \sphericalangle(c(b), x). \end{aligned}$$

Analog zu der Aussage für  $f$  können wir zeigen, dass  $\|\text{grad}(g)(x)\| = \frac{1}{\|x\|}$  für alle  $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbb{R}c(b)$  gilt.

Man kann nun die Ungleichung  $L(c) \geq \sphericalangle(c(b), e_1) = g(0)$  auch ganz ähnlich mit Hilfe der Funktion  $g$  beweisen. Daher können wir aus der Gleichheit auch schließen

$$c'(t) = -\|c'(t)\| \text{grad } g(c(t)) \text{ für } t \in (0, b).$$

Zusammen mit der Gleichung (1.1) können wir nun folgern

$$\text{grad } g(c(t)) = -\text{grad } f(c(t)). \quad (1.2)$$

Tatsächlich ist diese Folgerung trivial für Punkte mit  $c'(t) \neq 0$ . Man kann aber leicht einsehen, dass ein beliebiger Punkt  $c(t)$  Grenzwert einer Folge  $c(t_k) \rightarrow c(t)$  ist mit  $c'(t_k) \neq 0$  ( $k \in \mathbb{N}$ ).

Wir haben gesehen  $\text{grad } f(c(t)) \in \text{span}\{c(t), e_1\}$ . Analog gilt  $\text{grad } g(c(t)) \in \text{span}\{c(t), c(b)\}$ . Weiterhin ist  $\text{grad } f(c(t))$  senkrecht auf  $c(t)$ . Mithin folgt aus (1.2) die Gleichung  $\text{span}\{c(t), c(b)\} = \text{span}\{c(t), e_1\}$ . Da  $e_1$  und  $c(b)$  linear unabhängig sind, folgt weiter  $c(t) \in \text{span}_{\mathbb{R}}\{e_1, c(b)\}$ .

Also parametrisiert  $c(t)$  ein Großkreisstück von  $e_1$  nach  $c(b)$ . Aus (1.1) folgt, dass diese Parametrisierung monoton ist.

Dies beendet den 1. Fall und wir verbleiben mit:

*2. Fall.*  $c(b) = -e_1$  Wir können ohne Einschränkung annehmen  $c(t) \neq c(b)$  für alle  $t \in (0, b)$ . Es gilt  $\pi = \sphericalangle(e_1, -e_1) = L(c)$ .

Weitherhin gilt für alle  $t$ :

$$\pi = \sphericalangle(e_1, c(t)) + \sphericalangle(-e_1, c(t)) \leq L(c_{[0,t]}) + L(c_{[t,b]}) = L(c) = \pi.$$

Insbesondere folgt für alle  $t \in (a, b)$   $L(c_{[0,t]}) = \sphericalangle(e_1, c(t))$ . Aus Fall 1 folgt nun, dass  $c_{[0,t]}$  einen Großkreisbogen parametrisiert und  $t \rightarrow b$  liefert die Behauptung.

□

**Satz 2.2.** Sei  $c : [0, l] \rightarrow \mathbb{S}^n$  eine geschlossene stückweise  $C^1$ -Kurve mit  $L(c) < 2\pi$ . Dann ist  $c$  enthalten in einem offenen Halbraum, d.h. es existiert ein  $s \in \mathbb{R}^{n+1}$  mit  $\langle s, c(t) \rangle > 0$  für alle  $t \in [0, l]$ . Ist weiter  $L(c) = 2\pi$  und  $c$  nicht enthalten in einem offenen Halbraum, so besteht  $c$  bis auf Parametrisierung aus zwei Großkreishalbbögen.

BEWEIS. Wir beweisen den Satz etwas allgemeiner für stückweise differenzierbare Kurven. Definiere  $s$  als den Schwerpunkt der Kurve:

$$s := \frac{1}{L(c)} \int_0^l c(t) \cdot \|\dot{c}(t)\| dt$$

Zeige nun  $\langle s, c(t) \rangle > 0$  für alle  $t \in [0, l]$ .

Sei zunächst  $c$  regulär. Ohne Einschränkung gelte  $\|\dot{c}\| = 1$  (Insbesondere gilt also  $L(c) = l < 2\pi$ ).

Nach Abändern des Anfangspunktes gilt  $0 < t = \frac{l}{2} < \pi$  (Der Schwerpunkt ist unabhängig von der Wahl des Anfangspunktes).

Zu zeigen ist nun  $0 < \int_0^l \langle c(t), c(\frac{l}{2}) \rangle dt$ :

$$\begin{aligned} \int_0^l \langle c(t), c\left(\frac{l}{2}\right) \rangle dt &= \int_0^l \cos \angle(c(t), c\left(\frac{l}{2}\right)) dt \\ &\geq \int_0^{\frac{l}{2}} \cos(L(c_{|[t, \frac{l}{2}]})) dt + \int_{\frac{l}{2}}^l \cos(L(c_{|[\frac{l}{2}, t]})) dt \\ &= \int_0^l \cos\left(\frac{l}{2} - t\right) dt \\ &= 2 \sin\left(\frac{l}{2}\right) \\ &> 0 \end{aligned}$$

Nun sei  $c$  beliebig. Nach Verschieben des Anfangspunktes reicht es, die Ungleichung  $\langle c(t), s \rangle > 0$  für ein  $t = t_0$  zu zeigen, für welches  $L(c_{|[0, t_0]}) = L(c_{|[t_0, l]}) = \frac{L(c)}{2}$  gilt.

$$\begin{aligned}
& \int_0^l \langle c(t), c(t_0) \rangle \|\dot{c}(t)\| dt \\
& \geq \int_0^{t_0} \cos(L(c|_{[t,t_0]})) \|\dot{c}(t)\| dt + \int_{t_0}^l \cos(L(c|_{[t_0,l]})) \|\dot{c}(t)\| dt \\
& = \int_0^{t_0} \cos\left(\int_t^{t_0} \|\dot{c}(s)\| ds\right) \|\dot{c}(t)\| dt \\
& \quad + \int_{t_0}^l \cos\left(\int_{t_0}^t \|\dot{c}(s)\| ds\right) \|\dot{c}(t)\| dt \\
& = \left(-\sin\left(\int_t^{t_0} \|\dot{c}(s)\| ds\right)\right) \Big|_{t=0}^{t_0} - \left(\sin\left(\int_{t_0}^t \|\dot{c}(s)\| ds\right)\right) \Big|_{t=t_0}^l \\
& = 2 \sin\left(\frac{L(c)}{2}\right) \\
& > 0
\end{aligned}$$

Ist nun  $L(c) = 2\pi$ , so zeigt dasselbe Argument  $\langle c(t_0), s \rangle \geq 0$ . Bei Gleichheit folgt  $\langle c(0), c(t_0) \rangle = L(c|_{[0,t_0]}) = \pi$ , also  $c(t_0) = -c(0)$ . Da  $c$  eine geschlossene Kurve ist mit  $L(c) = 2\pi$ , folgt aus dem vorhergehenden Satz, dass  $c$  zwei Halbkreisbögen von  $c(0)$  nach  $c(t_0)$  durchläuft.  $\square$

**Definition 2.3.** Sei  $c : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine reguläre  $C^2$ -Kurve mit  $c(0) = c(l)$  und  $\dot{c}(0) = \dot{c}(l)$ . Dann heißt

$$\text{tkr}(c) := \int_0^l \kappa_c(t) \cdot \|\dot{c}(t)\| dt$$

die *Totalkrümmung* von  $c$ .

Nach Definition der Krümmung gilt  $\kappa_c(t) \cdot \|\dot{c}(t)\| = \|T'(t)\|$  und damit  $\text{tkr}(c) = L(T)$ .

**Satz 2.4.** Sei  $c : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine reguläre differenzierbar geschlossene  $C^2$ -Kurve. Dann gilt  $\text{tkr}(c) \geq 2\pi$  und Gleichheit höchstens dann, wenn  $c$  in einer affinen Ebene verläuft und  $T(t)$  einen Großkreis durchläuft.

BEWEIS. Ohne Einschränkung gelte  $\|c'(t)\| = 1$ . Angenommen, es ist  $\text{tkr}(c) < 2\pi$ . Nach Satz 2.2 verläuft also  $T(t) = \dot{c}(t)$  in einem offenen Halbraum und es

existiert ein  $s$  mit  $\langle s, \dot{c}(t) \rangle > 0$  für alle  $t \in [0, l]$ . Also ist  $\langle s, c(0) \rangle < \langle s, c(l) \rangle$ . Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung  $c(0) = c(l)$ !

Sei nun  $\text{tkr}(c) = 2\pi$ . Wegen Satz 2.2 können wir annehmen, dass  $T(t)$  zwei Großkreishalbbögen durchläuft. Setze wie im Beweis von Satz 2.2.

$$s := \frac{1}{\text{tkr}(c)} \int_0^l c'(t) \cdot \|c''(t)\| dt.$$

Wir wissen:  $\langle s, \dot{c}(t) \rangle \geq 0$ . Falls  $\langle s, \dot{c}(t) \rangle \not\equiv 0$ , folgt der Widerspruch wie zuvor, es ist also  $\langle s, \dot{c}(t) \rangle \equiv 0$ . Es folgt dann aus der Gleichheitsdiskussion im Beweis von Satz 2.2, dass das Bild der Kurve  $c'(t)$  invariant unter der Antipodal-Abbildung ( $p \mapsto -p$ ) von  $\mathbb{S}^{n-1}$  ist.

Also parametrisiert  $T$  einen Großkreis. Es gibt also  $v, w \in \mathbb{R}^n$  mit  $\dot{c}(t) \in \text{span}_{\mathbb{R}}\{v, w\}$ . Folglich ist  $c(t) \in c(0) + \text{span}_{\mathbb{R}}\{v, w\}$ .  $\square$

### 3 Ebene Kurven

**Bemerkung 3.1.** Die Drehung um  $90^\circ$  nach links ist gegeben durch

$$J: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, v \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} v.$$

Wir identifizieren  $\mathbb{R}^2$  manchmal mit  $\mathbb{C}$ . Dabei steht  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  für die komplexe Zahl  $x + iy$ .

Ebenso gilt für  $\varphi \in \mathbb{R}$ :

$$e^{i\varphi} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi)$$

Leser, denen die Definition der komplexen Exponentialfunktion fremd ist, sollten dies als Definition von  $e^{i\varphi}$  verstehen.

Mit dieser Identifikation entspricht  $J$  der Abbildung  $z \mapsto iz$ .

**Definition 3.2.** (Orientierter Winkel) Für  $v, w \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  definieren wir den orientierten Winkel  $\sphericalangle_o(v, w) \in (\pi, \pi]$  durch

$$\sphericalangle_o(v, w) := \begin{cases} \sphericalangle(v, w) & \text{falls } \langle Jv, w \rangle \geq 0 \\ -\sphericalangle(v, w) & \text{falls } \langle Jv, w \rangle < 0 \end{cases}$$

Es gilt nach Konstruktion  $|\sphericalangle_o(v, w)| = \sphericalangle(v, w)$ . Weiterhin sieht man leicht, dass  $\sphericalangle_o(v, w) = -\sphericalangle_o(w, v)$  für alle linear unabhängigen Vektoren  $v, w$  gilt.

Im Gegensatz zum nichtorientierten Winkel ist die Winkelfunktion  $f(x) = \sphericalangle_o(v, x)$  nicht stetig in negativen Vielfachen von  $v$ . Ein Vorteil ist indes, dass  $f$  auf der geschlitzten Ebene  $\mathbb{R}^2 \setminus (-\infty, 0]v$  sogar  $C^\infty$  ist.

**Satz 3.3.** Sei  $c: [0, b] \rightarrow \mathbb{S}^1$  stetig und  $\varphi_0 \in \mathbb{R}$  mit  $c(0) = e^{i\varphi_0}$ . Dann gibt es genau eine stetige Funktion  $\varphi: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\varphi(0) = \varphi_0$  und  $e^{i\varphi(t)} = c(t)$  für alle  $t$ . Weiterhin ist  $c$  genau dann  $C^k$ , wenn  $\varphi$  in  $C^k$  ist.

BEWEIS. *Eindeutigkeit.* Es seien  $\varphi_i: [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$  zwei stetige Funktionen mit  $e^{i\varphi_1(t)} = e^{i\varphi_2(t)}$ . Dann folgt  $e^{i(\varphi_1 - \varphi_2(t))} = 1$  und also  $\varphi_1(t) - \varphi_2(t) \in 2\pi\mathbb{Z}$ . Da  $\varphi_1 - \varphi_2$  stetig ist, impliziert dies  $\varphi_1 - \varphi_2$  ist konstant. Damit ist die Eindeutigkeit sicher gestellt.

*Existenz.* Aufgrund der gleichmäßigen Stetigkeit von  $c$  gibt es eine Unterteilung  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$ , die so fein ist, dass gilt  $\sphericalangle(c(t_i), c(t)) \neq \pi$  für alle  $t \in [t_i, t_{i+1}]$ .

Wir definieren  $\varphi_{[0, t_i]}$  nun durch Induktion nach  $i$ . Für  $i = 0$  ist  $[0, t_0]$  nur ein Punkt und wir setzen  $\varphi(0) = \varphi_0$ .

Es sein nun bereits  $\varphi_{[0, t_{i-1}]}$  stetig definiert. Dann setzen wir  $\varphi$  auf das Intervall  $[t_{i-1}, t_i]$  stetig fort durch  $\varphi(t) = \varphi(t_{i-1}) + \sphericalangle_o(c(t_{i-1}), c(t))$  für  $t \in [t_{i-1}, t_i]$ .

Es gilt  $\sphericalangle_o(e^{i\varphi(t_{i-1})}, e^{i\varphi(t)}) = \sphericalangle_o(c(t_{i-1}), c(t))$  und also  $e^{i\varphi(t)} = c(t)$  ( $t \in [t_{i-1}, t_i]$ ).

Wenn  $\varphi$  aus  $C^k$  ist, so ist  $c(t)$  offensichtlich in  $C^k$ . Ist nun umgekehrt  $c$  in  $C^k$  und  $t \in [0, b]$ , so gilt für ein  $\varepsilon > 0$  die Ungleichung  $\sphericalangle(c(t), c(s)) < \pi/2$  für alle  $s \in [t - \varepsilon, t + \varepsilon] \cap [0, b]$ . Man überprüft dann leicht für diese  $s$  die Identität  $\varphi(s) = \varphi(t) + \arcsin\langle Jc(t), c(s) \rangle$ . Da  $\arcsin$  auf  $(-1, 1)$  beliebig oft differenzierbar ist, folgt, dass  $\varphi$  in einer Umgebung von  $t$  in  $C^k$  ist. □

**Definition 3.4.** a) Für eine reguläre  $C^1$ -Kurve  $c$  im  $\mathbb{R}^2$  heißt

$$T(t) := \frac{\dot{c}(t)}{\|\dot{c}(t)\|} \text{ das Einheitsstangentialfeld,}$$

$$N(t) := JT(t) \text{ das Einheitsnormalenfeld.}$$

b) Für eine reguläre  $C^2$ -Kurve  $c$  heißt

$$\kappa_o(t) := \frac{\langle T'(t), N(t) \rangle}{\|\dot{c}(t)\|} \text{ die orientierte Krümmung von } c \text{ in } t.$$

c) Eine Kurve  $c$  heißt *konvex*, falls  $\kappa_o(t) \geq 0$  für alle  $t$  gilt.

Es gilt nach Konstruktion  $\langle N(t), T(t) \rangle = 0$ . Damit ist auch klar, dass sich diese Definition von  $N(t)$  aus Definition 1.5 höchstens im Vorzeichen unterscheidet.

**Definition 3.5.** Für eine Kurve  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt

$$c^- : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n, t \mapsto c(b + a - t)$$

die *invers parametrisierte Kurve*.

**Lemma 3.6.** a) Es gilt  $\kappa(t) = |\kappa_o(t)|$ .

b)  $\kappa_o(t)$  ändert bei Umorientierung von  $c$  das Vorzeichen.

BEWEIS. a) Es gilt

$$\langle T'(t), T(t) \rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \langle T(t), T(t) \rangle = 0.$$

Somit sind  $T'(t)$  und  $N(t)$  linear abhängig. Folglich

$$\|T'(t)\| = |\langle T'(t), N(t) \rangle|$$

und damit

$$\kappa(t) = |\kappa_o(t)|.$$

b) Ohne Einschränkung ist  $c$  wegparametrisiert und  $a = 0$ . Sei  $\tilde{c}(t) = c(b - t)$  die invers parametrisierte Kurve. Es gilt  $\tilde{c}''(t) = \kappa_o(t)N(t) = \kappa_o(t)J\tilde{c}'(t)$ .  
Wegen

$$\tilde{c}''(t) = c''(b - t) \text{ und } \tilde{c}'(t) = -c'(b - t)$$

folgt

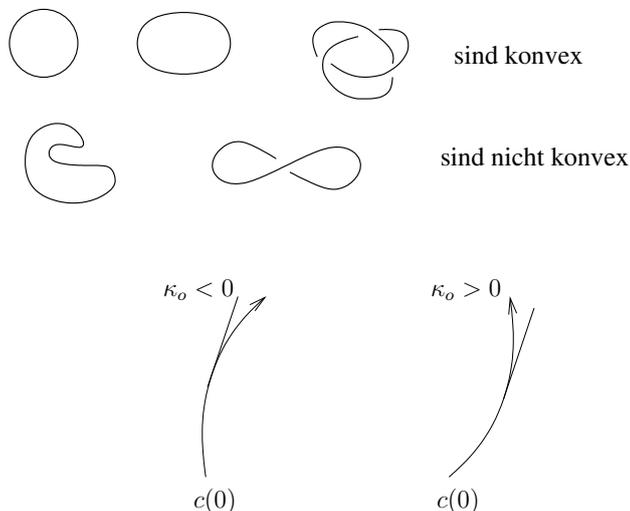
$$\tilde{c}''(t) = -\kappa_o(b - t)J\tilde{c}'(t)$$

und also wie behauptet  $\kappa_o, \tilde{c}(t) = -\kappa_o, c(b - t)$ .

□

Ist  $\kappa_o(t) > 0$ , so bedeutet dies, dass die Kurve  $c$  links herum läuft.

**Beispiel.** Für konvexe und nicht konvexe Kurven:



**Satz 3.7.** Es sei  $c: [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine reguläre  $C^2$ -Kurve und  $\varphi_0 \in \mathbb{R}$  mit  $T(0) = e^{i\varphi_0}$ . Setzen wir dann

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \int_0^t \kappa_o(s) \|c'(s)\| ds$$

so gilt  $e^{i\varphi(t)} = T(t)$

BEWEIS. Nach Satz 3.3 gibt es eine  $C^1$ -Funktion  $\psi(t)$  mit  $\psi(0) = \varphi_0$  und  $e^{i\psi(t)} = T(t)$ . Es gilt dann

$$\psi'(t) J e^{i\psi(t)} = T'(t) = \kappa_o(t) \|c'(t)\| N(t) = \kappa_o(t) \|c'(t)\| J e^{i\psi(t)}.$$

Also folgt  $\psi'(t) = \|\kappa_o(t)\| \|c'(t)\| = \varphi'(t)$ . Dies impliziert  $\psi = \varphi$ . □

Als Folgerung erhalten wir, dass wegparametrisierte ebene Kurven durch ihre Krümmung bis auf Bewegungen eindeutig charakterisiert sind.

**Korollar 3.8.** Sind  $c_1, c_2: [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$  zwei wegparametrisierte  $C^2$ -Kurven mit  $\kappa_{o1} = \kappa_{o2}$  so gibt es ein  $A \in \text{SO}(2)$  und ein  $v \in \mathbb{R}^2$ , so dass  $c_2(t) = A c_1(t) + v$  für  $t \in [0, l]$  gilt.

BEWEIS. Wir wählen  $A \in \text{SO}(2)$ , so dass  $AT_1(0) = T_2(0)$ . Wähle nun  $v \in \mathbb{R}^2$ , so dass  $c_2(0) = Ac_1(0) + v$ . Betrachte die Kurve  $\tilde{c}_1(t) = Ac_1(t) + v$ . Diese Kurve ist wegparametrisiert und  $\kappa_{o\tilde{c}_1}(t) = \kappa_{o1}(t)$ . Weiterhin gilt nach Konstruktion  $\tilde{c}_1(0) = c_2(0)$  und  $\tilde{c}'_1(0) = c'_2(0)$ . Die letzte Gleichung impliziert zusammen mit dem vorgehenden Satz  $\tilde{c}'_1(t) = c'_2(t)$  für alle  $t$ . Also ist  $c_2 - \tilde{c}_1$  konstant und wegen der Anfangsbedingung folgt wie behauptet  $c_2 = \tilde{c}_1$ .  $\square$

**Definition und Lemma 3.9.** Sei  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine reguläre, differenzierbar geschlossene  $C^2$ -Kurve.

a) Dann gilt

$$k := \frac{1}{2\pi} \int_a^b \kappa_0(t) \|\dot{c}(t)\| dt \in \mathbb{Z}.$$

$k$  heißt Tangentendrehzahl von  $c$ .

b) Hat  $c$  weiter Totalkrümmung  $2\pi$ , so ist  $c$  nach eventueller Umorientierung konvex und hat die Tangentendrehzahl 1. (Die Umkehrung ist trivial.)

BEWEIS. a) Setze wie im Satz 3.7

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \int_0^t \kappa_o(s) \|c'(s)\| ds.$$

Dann gilt also  $T(t) = e^{i\varphi(t)}$  und wegen  $T(a) = T(b)$  folgt  $\varphi(b) - \varphi(a) \in 2\pi\mathbb{Z}$  und somit die Behauptung.

b) Ist  $\text{tkr}(c) = 2\pi$ , so parametrisiert  $T(t)$  nach Satz 2.4 einen Großkreis. Nach eventueller Umorientierung ist  $c$  konvex.  $\square$

**Satz 3.10.** Eine reguläre differenzierbar geschlossene  $C^2$ -Kurve  $c : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit Totalkrümmung  $2\pi$  berandet ein konvexes Gebiet.

BEWEIS. Ohne Einschränkung sei  $\|\dot{c}(t)\| = 1$  und  $\kappa_0(t) \geq 0$ . Definiere

$$H(t) := \{c(t) + \alpha \cdot \dot{c}(t) + \beta \cdot N(t) \mid \alpha \in \mathbb{R}, \beta \geq 0\}$$

als die Halbebene links von der Tangente von  $c$  an der Stelle  $t$ . Dann ist für jedes  $t_0 \in [0, b]$  schon  $c(t) \in H(t_0)$ : Sei ohne Einschränkung  $t_0 = 0$ , sonst verschiebe

den Anfangspunkt der Kurve. Wähle  $s \in [0, b]$  mit  $\int_0^s \kappa(t) dt = \pi$ . (Dies ist die Hälfte der Totalkrümmung.) Es gilt

$$\langle \dot{c}(t), N(0) \rangle \begin{cases} \geq 0 & \text{für alle } t \in [0, s] \\ \leq 0 & \text{für alle } t \in [s, b] \end{cases},$$

denn wegen  $\kappa(t) = \|T'(t)\|$  gilt nach Wahl von  $s$

$$L(T|_{[0,s]}) = \pi \text{ und } L(T|_{[s,b]}) = \pi.$$

Ohne Einschränkung sei nun  $c(0) = 0$ . Aus

$$\langle \dot{c}(t), N(0) \rangle \geq 0$$

auf  $[0, s]$  erhält man mit Integration auf dem gleichen Intervall

$$\langle c(t), N(0) \rangle \geq 0.$$

Aus

$$\langle \dot{c}(t), N(0) \rangle \leq 0$$

auf  $[s, b]$  folgt wiederum für alle  $p \in [s, b]$

$$\begin{aligned} 0 &\geq \int_p^b \langle \dot{c}(t), N(0) \rangle dt \\ &= (\langle c(t), N(0) \rangle)_p^b \\ &= -\langle c(p), N(0) \rangle \end{aligned}$$

und damit

$$\langle c(p), N(0) \rangle \geq 0,$$

woraus die Behauptung folgt.

Es gilt also  $c(t) \in H(s)$  für alle  $t, s \in [0, b]$ , d.h. die Menge  $C$ , gegeben durch

$$c(t) \in \bigcap_{s \in [0, b]} H(s) =: C,$$

ist konvex und es ist  $c(t) \in \partial C$ . Damit umrandet  $c$  das konvexe Gebiet  $C$ .  $\square$

**Definition 3.11.** Eine geschlossene Kurve  $c : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt *einfach*, falls  $c|_{[0, b]}$  injektiv ist.

**Definition und Lemma 3.12** (Umlaufzahlen). Sei  $c : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine geschlossene Kurve und  $p \notin c([0, b])$ . Setze

$$h(t) := \frac{c(t) - p}{\|c(t) - p\|}.$$

Es gibt dann eine stetige Abbildung  $\varphi$  mit

$$h(t) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi(t)) \\ \sin(\varphi(t)) \end{pmatrix}$$

und man setzt

$$n_{c,p} := u(c, p) := \frac{\varphi(b) - \varphi(0)}{2\pi}$$

als die Anzahl der Umläufe von  $c$  um  $p$ , gezählt mit Orientierungen.

**Lemma 3.13.** Sei  $c$  eine geschlossene stückweise  $C^1$  Kurve und  $p \notin c([a, b])$ . Dann gilt

$$n_{c,p} = \frac{1}{2\pi} \int_a^b \frac{\langle c'(t), J(c(t)-p) \rangle}{\|c(t)-p\|^2}.$$

BEWEIS. Wir nehmen ohne Einschränkung  $p = 0$  an und setzen  $h(t) := \frac{c(t)}{\|c(t)\|}$ . Es gilt

$$h'(t) = \frac{c'(t)}{\|c(t)\|} - \frac{\langle c'(t), c(t) \rangle c(t)}{\|c(t)\|^3}.$$

Andererseits folgt aus Satz 3.3, dass  $h = e^{i\varphi(t)}$  gilt, wobei  $\varphi$  stetig und stückweise  $C^1$  ist. Somit folgt

$$h'(t) = \varphi'(t) \cdot J \cdot h(t).$$

Insbesondere also  $\varphi'(t) = \langle h'(t), Jh(t) \rangle = \frac{\langle h'(t), Jc(t) \rangle}{\|c(t)\|}$ . Setzen wir nun die obige Formel für  $h'$  ein so erhalten wir

$$\varphi'(t) = \frac{\langle c'(t), Jc(t) \rangle}{\|c(t)\|^2},$$

somit

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \int_a^b \frac{\langle c'(t), J(c(t)-p) \rangle}{\|c(t)-p\|^2}.$$

□

**Satz 3.14** (Jordanscher Kurvensatz). *Es sei  $c: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine einfache reguläre differenzierbar geschlossene  $C^2$  Kurve. Dann besitzt  $\mathbb{R}^2 \setminus c([0, 1])$  genau zwei Wegzusammenhangskomponenten. Genauer gilt, die Mengen*

$$U_1 := \{p \in \mathbb{R}^2 \setminus c([a, b]) \mid n_{c,p} = 0\} \text{ und}$$

$$U_2 := \{p \in \mathbb{R}^2 \setminus c([a, b]) \mid n_{c,p} \neq 0\}$$

*sind wegzusammenhängend. Weiter ist  $U_1$  unbeschränkt und  $U_2$  ist beschränkt.*

Eine Menge  $U \subset \mathbb{R}^n$  heißt dabei wegzusammenhängend, wenn sich je zwei Punkte durch einen stetigen Weg in  $U$  verbinden lassen.

Der Satz gilt allgemeiner für einfach geschlossene stetige Kurven  $c$ . Ein Beweis ist dann aber deutlich schwieriger.

Den Beweis des Satzes bereiten wir mit folgendem Lemma vor.

**Lemma 3.15.** *Sei  $c$  wie oben. Es gibt ein  $\varepsilon > 0$ , so dass die Abbildung*

$$\begin{aligned} H: [0, 1) \times (-\varepsilon, \varepsilon) &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (t, s) &\mapsto c(t) + sN(t) \end{aligned}$$

*injektiv ist und ihr Bild eine offene Umgebung von  $c([0, 1])$  ist.*

**BEWEIS.** Wir erinnern zunächst an folgende Definition: Eine Abbildung  $f: U \rightarrow V$  heißt offen, wenn sie offene Mengen auf offene Mengen abbildet.

Wir setzen die Kurve  $c$  periodisch fort zu  $c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $c(t+1) = c(t)$ . Wir definieren nun auch  $H$  auf  $\mathbb{R}^2$  durch  $H(t, s) = c(t) + sN(t)$ .

**Schritt 1.** Zu  $t_0 \in \mathbb{R}$  gibt es ein  $\delta > 0$ , so dass die Abbildung  $H|_{]t_0-\delta, t_0+\delta[ \times ]-\delta, \delta[}$  offen und injektiv ist.

Dies folgt unmittelbar aus dem Umkehrsatz aus der Analysis II. Es gilt nämlich  $H$  ist stetig partiell differenzierbar und die Jacobimatrix  $DH(t_0, 0)$  ist gegeben durch die  $2 \times 2$  Matrix mit den Spalten  $c'(t)$  und  $N(t)$ . Diese Matrix ist invertierbar und nun folgt mit dem Umkehrsatz: Es gibt eine Umgebung  $U \subset \mathbb{R}^2$  von  $(t_0, 0)$ , so dass  $H(U) \subset \mathbb{R}^2$  offen ist,  $H: U \rightarrow H(U)$  bijektiv ist und die Umkehrabbildung ebenfalls differenzierbar ist. Aus der Stetigkeit der Umkehrabbildung ergibt sich nun, dass  $H|_U$  eine offene Abbildung ist. Da  $U$  offen ist, gibt es  $\delta > 0$  mit  $]t_0 - \delta, t_0 + \delta[ \times ]-\delta, \delta[ \subset U$ .

**Schritt 2.** Es gibt ein  $\delta_2 > 0$ , so dass die Abbildung  $H|_{]t_0-\delta, t_0+\delta[ \times ]-\delta, \delta[}$  offen und injektiv ist für jedes  $t_0 \in \mathbb{R}$ .

Dies folgt mittels eines einfachen Kompaktheitsarguments aus Schritt 1. Beachte zunächst, dass es, wegen der Periodizität von  $c$  reicht,  $t_0 \in [0, 1]$  zu betrachten.

Sei gemäß Schritt 1  $\delta(t_0) > 0$ , so dass

$$H_{]t_0-2\delta(t_0), t_0+2\delta(t_0)[ \times ]-2\delta(t_0), 2\delta(t_0)[} \text{ offen und injektiv ist.}$$

Betrachte nun die offene Überdeckung

$$[0, 1] \subset \bigcup_{t_0 \in [0, 1]} ]t_0 - \delta(t_0), t_0 + \delta(t_0)[$$

Auf Grund der Kompaktheit von  $[0, 1]$  gibt es eine endliche Teilüberdeckung, d.h.

$$[0, 1] \subset \bigcup_{i=1}^k ]s_i - \delta(s_i), s_i + \delta(s_i)[$$

mit  $s_i \in [0, 1]$ . Setze nun  $\delta_2 := \min\{\delta(s_i) \mid i = 1, \dots, k\}$ . Es gibt dann für jedes  $t_0 \in [0, 1]$  ein  $i$  mit  $t_0 \in ]s_i - \delta(s_i), s_i + \delta(s_i)[$  und wegen

$$]t_0 - \delta, t_0 + \delta[ \times ] - \delta, \delta[ \subset ]t_0 - 2\delta(t_0), t_0 + 2\delta(t_0)[ \times ] - 2\delta(t_0), 2\delta(t_0)[$$

folgt die Behauptung aus der Wahl von  $\delta(s_i)$ .

**Schritt 3.** Setze  $h := \min\{\|c(t) - c(\tau)\| \mid \tau \in [0, 1], \delta_2 \leq t - \tau \leq 1 - \delta_2\}$ . Dann gilt Lemma 3.15 mit  $\varepsilon := \min\{\frac{h}{3}, \delta_2\}$ .

Die Offenheit des Bildes folgt unmittelbar aus Schritt 2. Zu zeigen bleibt die Injektivität. Sei also  $H(t_1, s_1) = H(t_2, s_2)$  mit  $0 \leq t_1 \leq t_2 < 1$  und  $|s_i| < \varepsilon$ .

Dies impliziert zunächst mit der Dreiecksungleichung  $\|c(t_2) - c(t_1)\| \leq s_1 + s_2 \leq \frac{2}{3}h$ . Auf Grund der Wahl von  $h$  folgt  $t_2 < t_1 + \delta_2$  oder  $t_2 - t_1 > 1 - \delta_2$ .

In beiden Fällen nutzen wir, dass die Einschränkung von  $H$  auf der Menge  $]t_1 - \delta_2, t_1 + \delta_2[ \times ] - \delta_2, \delta_2[$  injektiv ist.

Im ersten Fall folgt wegen  $t_2 \in [t_1, t_1 + \delta]$  direkt  $(t_1, s_1) = (t_2, s_2)$ . Im zweiten Fall folgt zunächst  $(t_2 - 1) \in ]t_1 - \delta_2, t_1 + \delta_2[$  und wegen  $H(t_2 - 1, s_2) = H(t_2, s_2)$  folgt nun aus der lokalen Injektivität  $(t_2 - 1, s_2) = (t_1, s_1)$ . Dies ist aber nicht möglich da  $t_2 - 1 < 0$ . Mithin tritt dieser Fall nicht auf. □

*Beweis von Satz 3.14.* Es sei  $\varepsilon > 0$  wie im Lemma gewählt.

**Schritt 1.** Für  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus c([0, 1])$  gibt es einen stetigen Weg  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus c([0, 1])$

so dass  $\gamma(0) = x$  und  $\gamma(1) = c(0) \pm \varepsilon/2$  (Vorzeichen hängt von  $x$  ab).

Setze  $\alpha(\lambda) = \lambda x + (1 - \lambda)c(0) + \frac{\varepsilon}{2}N(0)$  für  $\lambda \in [0, 1]$ . Trifft die Kurve  $\alpha$  nicht auf  $c([0, 1])$  so können wir  $\gamma = \alpha$  setzen und sind fertig.

Anderfalls gibt es  $\lambda_1 > 0$  minimal mit  $\alpha(\lambda_1) \in c([0, 1])$ . Wähle nun  $\lambda < \lambda_1$  so nahe an  $\lambda_1$  dass gilt  $\alpha(\lambda) \in H([0, 1] \times (-\varepsilon, \varepsilon))$ .

Es gilt dann  $\alpha(\lambda) = H(t, s)$  und wegen  $\alpha(\lambda) \notin c([0, 1])$  gilt  $s \neq 0$ .

Wir setzen nun die Kurve  $\alpha_{[0, \lambda]}$  von  $x$  nach  $\alpha(\lambda)$  fort indem wir der Parallelkurve von  $c$

$$\sigma \mapsto H(t - \tau, s - \sigma) \text{ mit } \tau \in [0, t]$$

bis  $H(0, s)$  folgen. Nach Lemma 3.15 trifft diese Parallelkurve niemals auf  $c$ . Schließlich können wir in Abhängigkeit vom Vorzeichen von  $s$  den Punkt  $H(s, 0)$  längs der Normalengeraden mit  $c(0) + \varepsilon/2N(0)$  oder mit  $c(0) - \varepsilon/2N(0)$  verbinden, ohne das Bild von  $c$  zu treffen.

**Schritt 2.** Es gibt nur eine unbeschränkte Wegzusammenhangskomponente  $U$  von  $\mathbb{R}^2 \setminus c([0, 1])$  und für jedes  $p \in U$  ist  $n_{c,p} = 0$ .

Es seien  $U_1$  und  $U_2$  unbeschränkte wegzusammenhängende Teilmengen von  $\mathbb{R}^2 \setminus c([0, 1])$ .

Wir wollen zeigen, dass es einen Weg von  $U_1$  nach  $U_2$  gibt, der  $c$  nicht trifft. Wähle  $R > 0$  so groß, dass  $c([0, 1]) \subset B_R(0)$ . Nun ist  $\mathbb{R}^2 \setminus B_R(0)$  offensichtlich wegzusammenhängend. Da  $U_1$  und  $U_2$  unbeschränkt sind gibt es  $u_i \in U_i$  mit  $\|u_i\| > R$ ,  $i = 1, 2$ . Wir wählen nun einen Weg von  $u_1$  nach  $u_2$  der in  $\mathbb{R}^2 \setminus B_R(0)$  verläuft und somit  $c([0, 1])$  nicht trifft.

Ist  $u$  ein stetiger Weg in  $\mathbb{R}^2 \setminus c([0, 1])$  so folgt leicht aus Lemma 3.7, dass  $n_{c,u(s)}$  konstant ist.

Es bleibt noch zu zeigen, dass es tatsächlich eine zweite Wegzusammenhangskomponente mit nicht verschwindender Umlaufzahl gibt. Dies folgt aber aus dem Satz 3.17.  $\square$

**Bemerkung 3.16.** Der obige Beweis läßt sich leicht auf reguläre  $C^1$  Kurven verallgemeinern. Dazu muss man im Lemma das Normalenfeld  $N(t)$  durch  $\tilde{N}(t)$  ersetzen, wobei  $\tilde{N}(t)$  nicht linear abhängig zu  $c'(t)$  sein darf und stetig differenzierbar von  $t$  abhängt.

Mit Hilfe des folgenden Satzes kann man Umlaufzahlen leicht ausrechnen.

**Satz 3.17.** Es sei  $c: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine geschlossene stückweise  $C^1$ -Kurve und  $t_0 \in [0, 1]$  mit  $c'(t_0) \neq 0$  und  $c(t) \neq c(t_0)$  für alle  $t \neq t_0$ . Dann gibt es ein  $\varepsilon > 0$ ,

so dass die Kurve  $u(s) = c(t_0) + sN(t_0)$  auf  $[-\varepsilon, \varepsilon]$  die Kurve  $c$  genau einmal schneidet und es gilt für  $s \in (0, \varepsilon]$

$$n_{c,u(s)} - n_{c,u(-s)} = 1$$

BEWEIS. Ohne Einschränkung ist  $c(t_0) = 0$  und  $c'(t_0) = e_2$ . Wähle  $\delta > 0$  so klein, dass

$$\frac{d}{dt} \langle e_2, c(t) \rangle = c'_2(t) \geq 1/2 \text{ für alle } t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$$

Nach Voraussetzung ist

$$\varepsilon_1 := \min\{\|c(t)\| \mid t \in [0, t_0 - \delta] \cup [t_0 + \delta, 1]\}$$

positiv.

**Schritt 1.** Es gibt ein  $\varepsilon > 0$  mit  $u([-\varepsilon, \varepsilon]) \cap c([0, 1]) = \{0\}$ .

Wir beweisen diesen Schritt durch Widerspruch. Angenommen es gibt eine Folge  $s_n \rightarrow 0$  mit  $s_n \neq 0$ , so dass  $u(s_n) = c(\tau_n)$  für ein  $\tau_n \in [0, 1]$ . Wir wollen zunächst  $\tau_n \rightarrow t_0$  zeigen. Es gilt  $\|c(\tau_n)\| = \|u(s_n)\| \rightarrow 0$ . Insbesondere ist  $\|c(\tau_n)\| < \varepsilon_1$  für fast alle  $n$  und dies impliziert  $\tau_n \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$  nach Definition von  $\varepsilon_1$ . Für alle diese  $n$  gilt dann aber  $\|c(\tau_n)\| \geq \frac{1}{2}|t_0 - \tau_n|$ . Also  $\tau_n \rightarrow t_0$ .

Nun folgt

$$\begin{aligned} c'(t_0) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c(\tau_n) - c(t)}{\tau_n - t} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n}{\tau_n - t} \frac{u(s_n) - u(0)}{s_n} \\ &= \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n}{\tau_n - t} \right) u'(0) \end{aligned}$$

– ein Widerspruch, da  $u'(0)$  und  $c'(t_0)$  linear unabhängig sind.

**Schritt 2.** Ohne Einschränkung gibt es ein  $\tilde{\delta} > 0$ , so dass  $c_{[t_0 - \tilde{\delta}, t_0 + \tilde{\delta}]}$  linear ist.

Wir definieren

$$\tilde{c}_{\tilde{\delta}}(t) := \begin{cases} c(t) & \text{falls } t \notin [t_0 - \tilde{\delta}, t_0 + \tilde{\delta}] \\ c(t_0 - \tilde{\delta}) + \frac{1}{2\tilde{\delta}}(t - t_0 + \tilde{\delta})(c(t_0 + \tilde{\delta}) - c(t_0 - \tilde{\delta})) & \text{sonst} \end{cases}$$

Es sei  $h$  der minimale Abstand von  $u(\pm\varepsilon)$  zu  $c([0, 1])$ .

Es ist leicht zu sehen, dass  $\tilde{c}_{\tilde{\delta}}$  gleichmäßig gegen  $c$  konvergiert für  $\tilde{\delta} \rightarrow 0$ . Es folgt aus Lemma 3.13, dass  $n_{\tilde{c}_{\tilde{\delta}}, u(\pm\varepsilon)} = n_{c, u(\pm\varepsilon)}$  für alle keinen  $\tilde{\delta}$  gilt.

Wir setzen nun  $\tilde{c} = \tilde{c}_{\tilde{\delta}}$  für ein solches  $\tilde{\delta} > 0$ . Wir können darüber hinaus annehmen, dass die Kurve  $\tilde{c}_{[t_0-\tilde{\delta}, t_0+\tilde{\delta}]}$  die  $x$  Achse in genau einen Punkt  $he_1$  scheidet mit  $|h| < \varepsilon$ .

Wir können nun  $u(\pm\varepsilon)$  durch Punkte der Form  $he_1 \pm sJ\tilde{c}'(t_0)$  ersetzen ohne dass sich die Umlaufzahl ändert für hinreichend kleines  $s$ .

Beachte dazu, dass für alle  $\lambda \in (0, 1]$   $\lambda u(\pm\varepsilon) + (1 - \lambda)he_1$  nicht auf  $\tilde{c}([0, 1])$  liegt.

Nach dieser Vorarbeit können wir den Satz nun beweisen. Wir wissen bereits, dass es reicht den Fall  $c_{[t_0-\tilde{\delta}, t_0+\tilde{\delta}]}$  zu betrachten. Nach erneutem verschieben, drehen und unparametrisieren gilt also ohne Einschränkung

$$c(t) = (t - t_0)e_1 \text{ für alle } t \in [t_0 - \tilde{\delta}, t_0 + \tilde{\delta}] \text{ und}$$

$$u(s) = se_2.$$

Wenden wir nun Lemma 3.13 an, so ergibt sich

$$\begin{aligned} n_{c,u(s)} - n_{c,u(-s)} &= \lim_{s \downarrow 0} (n_{c,u(s)} - n_{c,u(-s)}) \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{s \downarrow 0} \left( \int_{t_0-\tilde{\delta}}^{t_0+\tilde{\delta}} \frac{\langle c'(t), J(c(t)-u(s)) \rangle}{\|c(t)-u(s)\|^2} dt - \int_{t_0-\tilde{\delta}}^{t_0+\tilde{\delta}} \frac{\langle c'(t), J(c(t)-u(-s)) \rangle}{\|c(t)-u(-s)\|^2} dt \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{s \downarrow 0} \left( \int_{t_0-\tilde{\delta}}^{t_0+\tilde{\delta}} \frac{s}{(t-t_0)^2+s^2} dt - \int_{t_0-\tilde{\delta}}^{t_0+\tilde{\delta}} \frac{-s}{(t-t_0)^2+s^2} dt \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \lim_{s \downarrow 0} \int_{-\tilde{\delta}}^{\tilde{\delta}} \frac{s}{t^2+s^2} dt \\ &= \frac{1}{\pi} \lim_{s \downarrow 0} \int_{-\tilde{\delta}/s}^{\tilde{\delta}/s} \frac{1}{1+t^2} dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = 1 \end{aligned}$$

wobei wir in der letzten Gleichung benutzt haben, dass  $\arctan(t)$  eine Stammfunktion von  $\frac{1}{1+t^2}$  ist. In der zweiten Gleichung haben wir neben Lemma 3.13 noch ausgenutzt, dass die beiden Integrale außerhalb des Intervalls  $[t_0 - \tilde{\delta}, t_0 + \tilde{\delta}]$  für  $s \rightarrow 0$  gegen denselben Wert konvergieren.  $\square$

## 4 Fundamentalsatz der Algebra – ein Beweis mittels Umlaufzahlen

**Satz 4.1.** *Jedes nicht konstante Polynom  $p \in \mathbb{C}[X]$  besitzt eine Nullstelle.*

**Lemma 4.2.** *Es sei  $H: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $(s, t) \mapsto H(s, t) =: c_s(t)$  in  $C^1$  mit  $c_s(0) = c_s(1)$  für alle  $s$  und es sei  $p \notin H([0, 1]^2)$ . Dann gilt für die Umlaufzahl  $n_{c_0, p} = n_{c_1, p}$ .*

Das Lemma bleibt richtig, wenn  $H$  nur stetig ist. Auch wenn die Verallgemeinerung nicht schwierig ist, benügen wir uns mit dieser Version, da sie ausreichend für unsere Zwecke ist.

BEWEIS. Aus Lemma 3.13 ersieht man, dass  $s \mapsto n_{c_s, p}$  stetig ist. Wegen  $n_{c_s, p} \in \mathbb{Z}$  impliziert ist die Funktion konstant.  $\square$

*Beweis des Fundamentalsatzes.* Sei

$$p(z) = c_n z^n + \cdots + c_1 z + c_0$$

mit  $c_i \in \mathbb{C}$ ,  $c_n \neq 0$  und  $n \geq 1$ . Wir identifizieren  $\mathbb{C}$  mit  $\mathbb{R}^2$ . Betrachte die Kurve

$$\begin{aligned} h_r: [0, 1] &\rightarrow \mathbb{C} \\ t &\mapsto p(re^{2\pi i t}). \end{aligned}$$

Beachte, dass  $h_r$  als Bild einer geschlossenen Kurve unter  $p$  ebenfalls wieder geschlossen ist.

**Annahme.**  $p$  hat keine Nullstellen. Dann gilt  $h_r(t) \neq 0$  für alle  $p$ . Außer dem ist  $(r, t) \mapsto h_r(t)$  eine  $C^\infty$  Abbildung. Mithin ist nach dem Lemma die Umlaufzahl von  $h_r$  um 0 unabhängig von  $r$ . Da  $h_0$  eine Punktkurve ist folgt

$$n_{h_r, 0} = 0 \text{ für alle } r.$$

Die Idee ist nun, die Situation für große  $r$  zu analysieren, um zu einem Widerspruch zu kommen. Grob gesprochen sollte man erwarten, dass für große  $r$  das Verhalten der Kurve  $h_r$  durch den führenden Term  $c_n z^n$  im Polynom bestimmt wird.

Setze  $R := \frac{\sum_{j=1}^n |c_j|}{|c_n|} + 1$ . Man überprüft leicht, dass für  $|z| = R$  gilt:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=1}^{n-1} c_j z^j \right| &\leq \sum_{i=1}^{n-1} |c_j| |z|^j \\ &\stackrel{|z| \geq 1}{\leq} |z|^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} |c_j| \\ &< |c_n| \cdot R^n. \end{aligned}$$

Aus dieser einfachen Ungleichung folgt, dass für alle  $\lambda \in [0, 1]$  das Polynom

$$p_\lambda(z) = c_n z^n + \lambda(c_{n-1} z^{n-1} + \dots + c_0)$$

keine Nullstelle  $z$  mit  $|z| = R$  besitzt.

Betrachte nun die differenzierbare Familie von Kurven

$$\gamma_\lambda(t) = p_\lambda(R e^{2\pi i t}).$$

Es gilt  $\gamma_1(t) = h_R(t)$  und folglich

$$0 = n_{h_R, 0} = n_{\gamma_1, 0}.$$

Weiterhin trifft nach Konstruktion keine der Kurven  $\gamma_\lambda$  den Ursprung. Wie zuvor folgt also, dass  $n_{\gamma_\lambda, 0}$  konstant ist,  $\lambda \in [0, 1]$ .

Auswerten für  $\lambda = 0$  liefert, dass die Kurve

$$\gamma_0(t) = c_n \cdot (e^{2\pi i t})^n = c_n \cdot e^{2\pi i n t}$$

den Ursprung nicht umläuft. Andererseits rechnet man aber leicht nach  $n_{\gamma_0, 0} = n$  – ein Widerspruch.

□

## Kapitel 2

# Flächen konstanter Krümmung

Auch wenn wir erst später den Begriff Krümmung erklären, wollen wir in diesem Kapitel die Geometrie der drei wichtigsten Flächen näher untersuchen. Diese sind die Euklidische Ebene  $\mathbb{R}^2$ , die zweidimensionale Sphäre  $\mathbb{S}^2$  und die noch zu definierende hyperbolische Ebene  $\mathbb{H}^2$ .

### 5 Euklidische Geometrie

Wie bereits benutzt und aus der Analysis II bekannt, ist der  $\mathbb{R}^n$  versehen mit der Abstandsfunktion

$$d(x, y) = \|x - y\| = \left( \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}$$

ein metrischer Raum. Eine Isometrie eines metrischen Raumes  $(X, d)$  ist eine bijektive abstanderhaltende Abbildung  $\iota: X \rightarrow X$

**Satz 5.1.** *Sei  $\iota: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Isometrie. Dann gibt es ein  $A \in O(n)$  und ein  $v \in \mathbb{R}^n$  mit*

$$\iota(x) = Ax + v \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

BEWEIS. Es reicht den Fall  $\iota(0) = 0$  zu betrachten. Wir wollen zunächst die

Identität  $\langle \iota(x), \iota(y) \rangle = \langle x, y \rangle$  für alle  $x, y \in \mathbb{R}^n$  nachweisen. Es gilt

$$\begin{aligned} 2\langle \iota(x), \iota(y) \rangle &= -\|\iota(x) - \iota(y)\|^2 + \|\iota(x)\|^2 + \|\iota(y)\|^2 \\ &\stackrel{\iota(0)=0}{=} -d(\iota(x), \iota(y))^2 + d(\iota(x), \iota(0))^2 + d(\iota(y), \iota(0))^2 \\ &= -d(x, y)^2 + d(x, 0)^2 + d(y, 0)^2 \\ &= 2\langle x, y \rangle \end{aligned}$$

Insbesondere folgt nun, dass  $\iota(e_1), \dots, \iota(e_n)$  eine Orthonormalbasis bildet. Es sei  $A$  die  $n \times n$  Matrix mit den Spalten  $\iota(e_1), \dots, \iota(e_n)$ . Aus der Linearen Algebra ist bekannt, dass  $A \in O(n)$  gilt. Sei nun  $v \in \mathbb{R}^n$  beliebig. Da  $\iota(e_1), \dots, \iota(e_n)$  folgt aus der Linearen Algebra

$$\begin{aligned} \iota(v) &= \sum_{j=1}^n \langle \iota(e_j), \iota(v) \rangle \iota(e_j) = \sum_{j=1}^n \langle e_j, v \rangle \iota(e_j) \\ &= \sum_{j=1}^n v_j \iota(e_j) = A \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

**Korollar 5.2.** Das Produkt  $O(n) \times \mathbb{R}^n$  ist zusammen mit der Verknüpfung

$$(A, v)(B, w) = (AB, v + Aw)$$

eine Gruppe. Diese wird mit  $O(n) \times \mathbb{R}^n = \text{Iso}(\mathbb{R}^n)$  bezeichnet.

BEWEIS. Klar ist, dass die Isometrien des  $\mathbb{R}^n$  eine Gruppe bilden, wobei die Verknüpfung durch Komposition von Abbildungen gegeben ist. Nach Satz 5.1 läßt sich jede Isometrie eindeutig mit  $(A, v) \in O(n) \times \mathbb{R}^n$  identifizieren. Zu zeigen bleibt

**Behauptung.** Ist  $\iota(x) = Ax + v$  und  $\sigma(x) = Bx + w$  so gilt  $\iota \circ \sigma(x) = ABx + (Aw + v)$ .

Das ist aber offensichtlich richtig.

□

**Satz 5.3.** Liegen  $A, B, C \in \mathbb{R}^2$  nicht auf einer Geraden so gilt für das zugehörige Dreieck mit Seitenlängen  $a, b, c$  und Winkeln  $\alpha, \beta, \gamma$

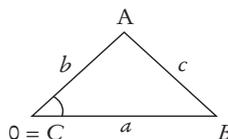
$$a) \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma) \quad (\text{Kosinussatz})$$

$$b) \frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c} \quad (\text{Sinussatz})$$

$$c) \alpha + \beta + \gamma = \pi$$

BEWEIS. a). Ohne Einschränkung gilt  $C = 0$ . Damit ist  $b = \|A\|$  und  $a = \|B\|$  und  $c = \|A - B\|$ . Folglich

$$\begin{aligned} c^2 &= \|A - B\|^2 = \|A\|^2 + \|B\|^2 - 2\langle A, B \rangle \\ &= a^2 + b^2 - 2\cos(\gamma)ab \end{aligned}$$



b). Nach dem Kosinussatz gilt  $\cos^2(\gamma) = \frac{(c^2 - a^2 - b^2)^2}{4a^2b^2}$  und folglich

$$\begin{aligned} \frac{\sin^2(\gamma)}{c^2} &= \frac{4a^2b^2 - (c^2 - a^2 - b^2)^2}{4a^2b^2c^2} \\ &= \frac{2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) - (c^4 + a^4 + b^4)}{4a^2b^2c^2} \end{aligned}$$

Die rechte Seite ist nun offensichtlich invariant unter Permutationen von  $a, b, c$  und also folgt die Behauptung.

c). Natürlich kann die Formel rechnerisch aus dem Vorhergehenden ableiten. Einfacher ist allerdings ein elementar geometrischer Beweis.

Zieht man eine Parallele der Grundseite  $c$  durch den Punkt  $C$  und verlängert man die beiden anderen Seiten ( $a$  und  $b$ ) so schneiden sich in  $C$  drei Geraden. Es entstehen 6 Winkel und man sieht leicht ein das jeweils zwei Winkel gleich  $\alpha, \beta$  und  $\gamma$  sind. Mithin also  $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 2\pi$ .

□

## 6 Zur Geometrie der Sphäre

**Definition 6.1.** a) Ein metrischer Raum  $X$  heißt ein innerer metrischer Raum falls für alle  $x, y \in X$  gilt: Für jedes  $r > d(x, y)$  gibt es eine  $r$ -Lipschitz stetige Kurve  $c: [0, 1] \rightarrow X$  mit  $c(0) = x$  und  $c(1) = y$ .

- b)  $X$  heißt geodätischer Raum falls gilt: Zu je zwei Punkten  $x, y \in X$  gibt es eine  $d(x, y)$ -Lipschitz stetige Kurve  $c: [0, 1] \rightarrow X$  mit  $c(0) = x$  und  $c(1) = y$ . Ein solche Kurve heißt dann Geodätische.

**Satz 6.2.** Die Sphäre  $\mathbb{S}^n$  versehen mit der Abstandsfunktion  $d(x, y) = \angle(x, y)$  ist ein geodätischer Raum. Die Geodätischen sind Großkreise.

Der Beweis des Satzes ist relativ einfach, weil die Hauptarbeit bereits in Satz 2.2 erledigt wurde.

BEWEIS. Zunächst einmal wollen wir einsehen, dass  $\mathbb{S}^n$  mit  $d$  ein metrischer Raum ist. Symmetrie und positive Definitheit sind klar. Um die Dreiecksungleichung einzusehen beachte man, dass es für  $x, y, z \in \mathbb{S}^n$  eine stückweise differenzierbare Kurve  $c: [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^n$  gibt mit  $c(0) = x$ ,  $c(1/2) = y$ ,  $c(1) = z$  und  $L(c) = \angle(x, y) + \angle(y, z)$ .

Nach Satz 2.2 hat aber jede Kurve von  $x$  nach  $z$  mindestens die Länge  $\angle(x, z)$ . Also

$$\angle(x, z) \leq \angle(x, y) + \angle(y, z).$$

Nun ist es einfach einzusehen, dass  $\mathbb{S}^n$  ein geodätischer Raum ist.

Seien zunächst  $x, y \in \mathbb{S}^n$  linear unabhängig. Setze

$$z = \frac{y - \langle y, x \rangle x}{\|y - \langle y, x \rangle x\|}$$

$x, y, z$  liegen in einem zweidimensionalen Raum und  $x, z$  bilden eine Orthonormalbasis dieses Raumes. Es gilt also für  $\varphi = \angle(x, y)$

$$y = \cos(\varphi)x + \sin(\varphi)z$$

Setze nun  $c(t) = \cos(\varphi t)x + \sin(\varphi t)z$   $t \in [0, 1]$ . Dann ist  $\angle(c(t), c(s)) = \varphi|t-s|$ .  $c$  Lipschitz ist stetig mit Lipschitz-Konstante  $\varphi$ . Der Fall von  $x = -y$  ist ähnlich. Also ist  $\mathbb{S}^n$  ein geodätischer Raum. Klar ist weiter, dass Großkreise Geodätische sind.

Zu zeigen bleibt noch, dass es keine weiteren Geodätischen gibt. Sei dazu  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^n$  eine  $\varphi$ -Lipschitz stetige Kurve von  $x$  nach  $y$  mit  $\varphi = \angle(x, y)$  so muss Gleichheit in der Dreiecksungleichung gelten

$$\angle(x, y) = \angle(x, \gamma(t_0)) + \angle(\gamma(t_0), y)$$

Wie zuvor gibt es dann aber auch eine stückweise differenzierbare Kurve  $c$  mit  $c(0) = x$ ,  $c(1/2) = \gamma(t_0)$ ,  $c(1) = y$  und  $L(c) = \angle(x, \gamma(t_0)) + \angle(\gamma(t_0), y) = \angle(x, y)$ .

Es folgt nun aus Satz 2.2, dass  $c$  einen Großkreis parametrisiert.

Insbesondere folgt, dass  $\gamma(t_0)$  auf einem minimalen Großkreisstück von  $x$  nach  $y$  liegt.  $\square$

**Satz 6.3.** Sei  $\iota: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  eine Isometrie der Sphäre versehen mit der Metrik  $d(p, q) = \angle(p, q)$ . Dann gibt es genau ein  $A \in O(n+1)$  mit  $\iota(x) = Ax$  für alle  $x \in \mathbb{S}^n$ . Umgekehrt ist  $A|_{\mathbb{S}^n}$  eine Isometrie für  $A \in O(n+1)$ .

BEWEIS. Wir setzen  $\iota$  zu  $\bar{\iota}: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  durch

$$\bar{\iota} = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = 0, \\ \|x\| \iota\left(\frac{x}{\|x\|}\right) & \text{falls } x \neq 0. \end{cases}$$

fort. Offenbar ist  $\|\bar{\iota}(x)\| = \|x\|$ . Weiter gilt

$$\begin{aligned} \|\bar{\iota}(x) - \bar{\iota}(y)\|^2 &= \|\bar{\iota}(x)\|^2 + \|\bar{\iota}(y)\|^2 - 2\langle \bar{\iota}(x), \bar{\iota}(y) \rangle \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\|x\|\|y\| \cos(\angle(\bar{\iota}(x), \bar{\iota}(y))) \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\|x\|\|y\| \cos(\angle(x, y)) \\ &= \|x - y\|^2 \end{aligned}$$

Also ist  $\bar{\iota}$  eine Isometrie des  $\mathbb{R}^n$  und wegen Satz 5.1 und  $\bar{\iota}(0) = 0$  folgt: Es gibt  $A \in O(n)$  mit  $\bar{\iota}(x) = Ax$  für alle  $x$ . Damit ist die Existenz von  $A$  gezeigt und die Eindeutigkeit ist trivial. Schließlich sind orthogonale Abbildungen winkelerhaltend und also liefert jedes  $A \in O(n+1)$  in der Tat eine Isometrie.  $\square$

**Satz 6.4.** Sind  $A, B, C \in \mathbb{S}^2$  so gelten für das zugehörige geodätische Dreieck mit Seitenlängen  $a, b$  und  $c$  und Winkeln  $\alpha, \beta$  und  $\gamma$  die folgenden Formeln

a)  $\cos(c) = \cos(a) \cdot \cos(b) + \sin(a) \sin(b) \cos(\gamma)$  (Seitenkosinussatz)  
und die entsprechenden permutierten Gleichungen.

b)  $\frac{\sin(a)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(b)}{\sin(\beta)} = \frac{\sin(c)}{\sin(\gamma)}$  (Sinussatz)

c)  $\cos(\gamma) = -\cos(\alpha) \cos(\beta) + \sin(\alpha) \sin(\beta) \cos(c)$  (Winkelkosinussatz)  
und die entsprechenden permutierten Gleichungen.

d)  $\alpha + \beta + \gamma \geq \pi$  mit Gleichheit nur dann, wenn alle drei Seiten in einem einzigen Halbkreisbogen enthalten sind

BEWEIS. a) Das Dreieck mit den Ecken  $A, B$  und  $C$ , den Seiten  $a, b$  und  $c$  und den Winkeln  $\alpha, \beta$  und  $\gamma$  kann ersetzt werden durch das Dreieck mit den Ecken  $SA, SB$  und  $SC$  für  $S \in O(3)$ . Ohne Einschränkung kann

$$C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} \sin(a) \\ 0 \\ \cos(a) \end{pmatrix}$$

angenommen werden. Nach eventuellem Spiegeln kann weiter

$$A = \begin{pmatrix} \sin(b) \cos(\gamma) \\ \sin(b) \sin(\gamma) \\ \cos(b) \end{pmatrix}$$

angenommen werden. Es folgt

$$\cos(c) = \langle A, B \rangle = \sin(a) \sin(b) \cos(\gamma) + \cos(a) \cos(b).$$

b) Wir benutzen den Seitenkosinussatz in der Form

$$\cos(\gamma) = \frac{\cos(c) - \cos(a) \cos(b)}{\sin(a) \sin(b)}. \quad (2.1)$$

Es ist nun

$$\begin{aligned} \frac{\sin^2(c)}{\sin^2(\gamma)} &= \frac{\sin^2(c)}{1 - \cos^2(\gamma)} \\ &= \frac{\sin^2(a) \sin^2(b) \sin^2(c)}{\sin^2(a) \sin^2(b) - (\cos(c) - \cos(a) \cos(b))^2} \\ &= \frac{\sin^2(a) \sin^2(b) \sin^2(c)}{(1 - \cos(a))^2 (1 - \cos(b))^2 - (\cos(c) - \cos(a) \cos(b))^2} \\ &= \frac{\sin^2(a) \sin^2(b) \sin^2(c)}{1 - \cos^2(a) - \cos^2(b) - \cos^2(c) - 2 \cos(a) \cos(b) \cos(c)} \end{aligned}$$

Da der letzte Term unter Permutation invariant ist, folgt die Aussage des Satzes.

c) Aus dem Seitenkosinussatz ist bekannt

$$\cos(\alpha) = \frac{\cos(a) - \cos(b) \cos(c)}{\sin(c) \sin(b)} \quad \text{und} \quad \cos(\beta) = \frac{\cos(b) - \cos(a) \cos(c)}{\sin(a) \sin(c)}. \quad (2.2)$$

Mithin

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) \cos(\beta) &= \frac{\cos(a) \cos(b) - (\cos^2(b) + \cos^2(a)) \cos(c) + \cos(a) \cos(b) \cos(c)^2}{\sin(a) \sin(b) \sin^2(c)} \\ &= \frac{\cos(a) \cos(b) \sin^2(c) - (\cos^2(b) + \cos^2(a)) \cos(c) + 2 \cos(a) \cos(b) \cos(c)^2}{\sin(a) \sin(b) \sin^2(c)}. \end{aligned}$$

Kombinieren wir dies mit (2.1) so folgt

$$\frac{\cos(\gamma) + \cos(\alpha) \cos(\beta)}{\cos(c)} = \frac{\sin^2(c) - \cos^2(b) - \cos^2(a) + 2 \cos(a) \cos(b) \cos(c)}{\sin(a) \sin(b) \sin^2(c)} \quad (2.3)$$

Quadrieren von (2.2) ergibt

$$\cos^2(\alpha) = \frac{\cos^2(a) - 2 \cos(a) \cos(c) \cos(b) + \cos^2(b) \cos^2(c)}{\sin^2(c) \sin^2(b)}$$

und einsetzen in die zweite Gleichung der folgenden Gleichungskette liefert.

$$\begin{aligned} \sin(\alpha) \sin(\beta) &\stackrel{b)}{=} \frac{\sin^2(\alpha) \sin(b)}{\sin(a)} \\ &= \frac{\sin^2(c) \sin^2(b) - \cos^2(a) + 2 \cos(a) \cos(c) \cos(b) - \cos^2(b) \cos^2(c)}{\sin^2(c) \sin(b) \sin(a)} \\ &= \frac{-\cos^2(c) + \sin^2(b) - \cos^2(a) + 2 \cos(a) \cos(c) \cos(b)}{\sin^2(c) \sin(b) \sin(a)} \\ &= \frac{\sin^2(c) - \cos^2(b) - \cos^2(a) + 2 \cos(a) \cos(b) \cos(c)}{\sin(a) \sin(b) \sin^2(c)}. \end{aligned}$$

Zusammen mit (2.3) folgt nun die Behauptung.

d)

$$\begin{aligned} \cos(\gamma) &= -\cos(\alpha) \cos(\beta) + \sin(\alpha) \sin(\beta) \cos(c) \\ &\leq -\cos(\alpha) \cos(\beta) + \sin(\alpha) \sin(\beta) \\ &= -\cos(\alpha + \beta) = \cos(\pi - \alpha - \beta). \end{aligned}$$

Wir können ohne Einschränkung  $\alpha + \beta \leq \pi$  annehmen. Da der  $\cos$  auf dem Intervall  $[0, \pi]$  streng monoton fallend ist, ergibt sich aus dieser Ungleichung dann  $\gamma \geq \pi - \alpha - \beta$ . Gleichheit kann nur dann gelten, wenn  $\sin(\alpha) \sin(\beta) \cos(c) = \sin(\alpha) \sin(\beta)$  gilt. Also ist bei Gleichheit eine der Bedingungen  $c = 0$ ,  $\alpha = 0$  oder  $\beta = 0$  erfüllt. Dies wiederum impliziert, dass alle Seiten auf einem Halbkreis liegen.  $\square$

## 7 Die Hyperbolische Ebene

### 7.1 Das Minkowski Modell der hyperbolischen Ebene

**Definition 7.1.**  $\mathbb{R}^{2,1} := (\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , wobei

$$\langle v, w \rangle := \sum_{i=1}^2 v_i w_i - v_3 w_3.$$

$$O(2, 1) := \{A \in GL_3(\mathbb{R}) \mid \langle Av, Aw \rangle = \langle v, w \rangle \text{ für alle } v, w \in \mathbb{R}^3\}.$$

Der 2-dimensionale hyperbolische Raum ist gegeben durch

$$\mathbb{H}^2 := \{q \in \mathbb{R}^{2,1} \mid \langle\langle q, q \rangle\rangle = -1, q_3 > 0\}.$$

Sei  $c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2 \subset \mathbb{R}^3$  stückweise  $C^1$ . Dann definiert man

$$L_{hyp}(c) := \int_0^1 \langle\langle c'(t), c'(t) \rangle\rangle^{\frac{1}{2}} dt.$$

Seien  $p, q \in \mathbb{H}^2$ . Man setzt

$$d_{hyp}(p, q) := \inf\{L_{hyp}(c) \mid c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2 \subset \mathbb{R}^3 \text{ } c \text{ ist } C^1, c(0) = p, c(1) = q\}.$$

Ist  $q = (q', q_3) \in \mathbb{H}^2$ , dann gilt  $\|q'\|^2 - q_3^2 = -1$ . und wegen  $q_3 > 0$  also  $q_3 = \sqrt{1 + \|q'\|^2}$ . Aus dem folgenden Lemma folgt insbesondere, dass die hyperbolische Länge einer nicht konstanten Kurve immer positiv ist.

**Lemma 7.2.** a) Jeder Punkt  $p \in \mathbb{H}^2$  ist von der Form  $p = \cosh(t)e_3 + \sinh(t)v$  wobei  $v \in \text{span}_{\mathbb{R}}(e_1, e_2)$  mit  $\langle\langle v, v \rangle\rangle = 1$  und  $t \geq 0$ . Umgekehrt sind alle diese Punkte auch in  $\mathbb{H}^2$ .

b) Es gilt

$$\begin{aligned} T_p\mathbb{H}^2 &:= \{c'(0) \mid c : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2, C^1 \text{ mit } c(0) = p\} \\ &= \{v \in \mathbb{R}^3 \mid \langle\langle v, p \rangle\rangle = 0\} \end{aligned}$$

und  $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$  ist of  $T_p\mathbb{H}$  positiv definit.  $T_p\mathbb{H}$  ist mithin ein zweidimensionaler euklidischer Vektorraum.

c) Wähle zu  $p \in \mathbb{H}^2$   $v$  und  $t$  wie in a). Sei  $w \in \text{span}_{\mathbb{R}}(e_1, e_2)$  mit  $\langle\langle v, w \rangle\rangle = 0$  und  $\langle\langle w, w \rangle\rangle = 1$ . Dann bilden die Vektoren  $\sinh(t)e_3 + \cosh(t)v$  und  $w$  eine Orthonormalbasis von  $T_p\mathbb{H}$ .

Im folgenden ist mit  $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$  immer der Untervektorraum  $\text{span}_{\mathbb{R}}(e_1, e_2)$  des  $\mathbb{R}^3$  gemeint.

*Proof.* a). Sei  $p \in \mathbb{H}^2$ . Wähle  $t \geq 0$  mit  $\sinh(t) = \sqrt{p_1^2 + p_2^2}$ . Wähle außerdem einen Einheitsvektor  $v \in \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$  mit  $\sinh(t)v = (0, p_1, p_2)^{tr}$ . Wie wir vor dem Lemma gesehen haben, gilt  $p_3 = \sqrt{1 + p_1^2 + p_2^2} = \sqrt{1 + \sinh^2(t)} = \cosh(t)$ . Mithin

$$p = \cosh(t)e_3 + \sinh(t)v$$

Ist nun umgekehrt  $p$  von dieser Form so ist  $p_3 > 1$  und  $\langle p, p \rangle = \sinh^2(t) - \cosh^2(t) = -1$  und also  $p \in \mathbb{H}^2$ .

b). Ist  $c(t) \in \mathbb{H} \subset \mathbb{R}^3$  eine  $C^1$  Kurve so gilt  $\langle c(t), c(t) \rangle = -1$  und folglich  $\langle c'(t), c(t) \rangle = 0$ . Dies zeigt " $\subset$ ".

Für die andere Inklusion wählen wir zu  $p$  ein  $v$  und  $t \geq 0$  wie in a) und ein Einheitsvektor  $w \in \mathbb{R}^2$  mit  $\langle v, w \rangle = 0$ . Betrachten wir nun die Abbildung

$$f(\varphi, s) = \cosh(s)e_3 + \sinh(s)(\cos(\varphi)v + \sin(\varphi)w)$$

Nach Konstruktion gilt dann  $p = f(0, t)$ .

Mittels der bereits gezeigten Inklusion " $\subset$ " folgt nun, dass  $T_p H$  das Bild der Jacobimatrix  $Df(0, s)$  enthält, denn es gilt

$$Df(0, t)y = \left. \frac{d}{d\tau} \right|_{\tau=0} f((0, t) + \tau y).$$

Nun sieht man leicht, dass für  $t > 0$  das Bild von  $Df(0, t)$  ein zweidimensionaler Untervektorraum ist. Für

$$t > 0$$

folgt nun die Inklusion " $\supset$ " aus der bereits gezeigten Inklusion " $\subset$ ". Ist

$$t = 0$$

so kann man direkter mit Hilfe von a) argumentieren.

Um einzusehen, dass  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  auf dem Untervektorraum  $T_p \mathbb{H}$  positiv definit ist, argumentieren wir mit Widerspruch. Gäbe es  $v \in T_p \mathbb{H}$  mit  $\langle v, v \rangle \leq 0$  so folgt wegen  $\langle v, p \rangle = 0$ , dass  $v$  und  $p$  linear unabhängig sind und die Einschränkung von  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  auf den zweidimensionalen Untervektorraum  $\text{span}_{\mathbb{R}}(v, p)$  negativ semidefinit ist. Aus Dimensionsgründen hat dieser Untervektorraum einen nicht trivialen Schnitt mit  $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ . Da  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  aber auf  $\mathbb{R}^2$  positiv definit ist, gibt dies einen Widerspruch.

c). Aus dem zweiten Teil des Beweises von b) folgt leicht, dass  $\sinh(t)e_3 + \cosh(t)v$  und  $w$  sind in  $T_p H$ . Eine einfache Rechnung zeigt, dass die beiden Vektoren orthonormal sind.  $\square$

**Lemma 7.3.** a) Die Gruppe  $O_+(2, 1) = \{A \in O(2, 1) | a_{33} > 0\} \subset O(2, 1)$  operiert isometrisch auf  $\mathbb{H}^2$ , d.h.  $d_{hyp}(Ap, Aq) = d_{hyp}(p, q)$  für alle  $A \in O_+(2, 1)$  und  $p, q \in \mathbb{H}^2$ .

b) Für alle  $p, q \in \mathbb{H}^2$  existiert ein  $A \in O_+(2, 1)$  mit  $Ap = q$ .

BEWEIS. a). Definiere

$$N^2 := \{p \in \mathbb{R}^{2,1} \mid \langle p, p \rangle = -1\} = \mathbb{H}^2 \amalg -\mathbb{H}^2.$$

Für alle  $A \in O(2, 1)$  und jedes  $p \in N^2$  ist  $Ap \in N^2$ . Weiter gilt für  $A \in O(2, 1)$

$$A \in O_+(2, 1) \iff Ae_3 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} \in \mathbb{H}^2.$$

Da  $\mathbb{H}^2$  wegzusammenhängend ist, gilt  $A\mathbb{H}^2 = \mathbb{H}^2$ . Somit ist

$$O_+(2, 1) = \{A \in O(2, 1) \mid A\mathbb{H}^2 = \mathbb{H}^2\}.$$

Für  $A \in O_+(2, 1)$  und  $p, q \in \mathbb{H}^2$  ist also  $d_{hyp}(Ap, Aq)$  definiert. Seien nun  $A \in O_+(2, 1) \subset O(2, 1)$  und  $c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2 \subset \mathbb{R}^3$  eine  $C^1$ -Kurve. Dann gilt

$$L_{hyp}(c) = \int_0^1 \langle \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle^{\frac{1}{2}} dt = \int_0^1 \langle A\dot{c}(t), A\dot{c}(t) \rangle^{\frac{1}{2}} dt = L_{hyp}(Ac).$$

Somit folgt  $d_{hyp}(p, q) = d_{hyp}(Ap, Aq)$ .

b). Es reicht zu zeigen, dass es für alle  $p \in \mathbb{H}^2$  ein  $A \in O_+(2, 1)$  gibt mit  $Ae_3 = p$ .

Denn sind  $p, q \in \mathbb{H}^n$ , so gibt es  $A, B \in O_+(2, 1)$  mit  $Ae_3 = p$ ,  $Be_3 = q$ , und also  $BA^{-1}p = q$ .

Es gilt  $A = (s_1, s_2, s_3) \in O(n, 1)$  genau dann, wenn  $\langle s_i, s_j \rangle = \delta_{ij}$  für  $(i, j) \neq (3, 3)$  und  $\langle s_3, s_3 \rangle = -1$ .

Es sein nun  $p = s_3 \in \mathbb{H}$  beliebig. Nach Lemma 7.2 b) gibt es dann eine Orthonormalbasis  $s_1, s_2 \in T_p\mathbb{H}$  und es gilt  $(s_1, s_2, s_3) \in O(2, 1)$ . Wegen  $s_3 \in \mathbb{H}$  folgt sogar  $(s_1, s_2, s_3) \in O_+(2, 1)$ . Schließlich ist  $(s_1, s_2, s_3)e_3 = s_3$  und die Behauptung folgt.  $\square$

**Satz 7.4.** Seien  $p, q \in \mathbb{H}^2$ . Dann gilt  $d_{hyp}(p, q) = \operatorname{arccosh}(-\langle p, q \rangle)$ .

BEWEIS. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei  $p = e_3$ : Sei die Aussage bereits für  $e_3$  gezeigt und  $p \in \mathbb{H}^n$  beliebig. Da  $O_+(3, 1)$  transitiv auf  $\mathbb{H}^n$  operiert, existiert ein  $A \in O_+(2, 1)$  mit  $Ae_3 = p$  und es ist

$$\begin{aligned} d_{hyp}(p, q) &= d_{hyp}(e_3, A^{-1}q) \\ &= \operatorname{arccosh}(-\langle e_{n+1}, A^{-1}q \rangle) \\ &= \operatorname{arccosh}(-\langle p, q \rangle). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r: \mathbb{H}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ q &\mapsto \operatorname{arccosh}(-\langle e_3, q \rangle) = \operatorname{arccosh}(q_3). \end{aligned}$$

**Behauptung.** Ist  $c: (0, 1) \rightarrow \mathbb{H}^2 \setminus \{e_3\} \subset \mathbb{R}^3$   $C^1$  so ist auch  $r \circ c$  stetig differenzierbar und es gilt  $\langle c'(s), c'(s) \rangle \geq (r \circ c)'(s)^2$ .

Zunächst einmal ist klar, dass  $r$  in einer Umgebung von  $\mathbb{H}^2 \setminus \{e_3\}$  eine  $C^\infty$  Funktion ist. Nach Kettenregel ist auch  $r \circ c$  stetig differenzierbar.

Wie bei jeder  $C^\infty$ -Abbildung, ist für jedes  $p \in \mathbb{H}^2 \setminus e_3$  die Abbildung

$$Dr(p): \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, v \mapsto \left. \frac{d}{d\tau} \right|_{\tau=0} Dr(p + \tau v)$$

linear und es gilt  $(r \circ c)'(s) = Dr(p)(c'(s))$ . Üblicherweise nutzt man  $Dr(p)(v) = \langle \operatorname{grad}(r), v \rangle$  und rechnet mit  $\operatorname{grad}(r)$ . Da wir in diesem Abschnitt uns den  $\mathbb{R}^3$  mit  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  versehen denken, ist es jedoch besser, die lineare Abbildung  $Dr(p)$  zu betrachten.

Wähle gemäß Lemma 7.2 zu  $p = c(s) \in \mathbb{H}^2$  ein  $v \in \mathbb{R}^2$  und  $t \geq 0$  mit  $p = \cosh(t)e_3 + \sinh(t)v$ . Wähle weiter  $w \in \mathbb{R}^2$  senkrecht mit  $\langle v, w \rangle = 0$  und  $\langle w, w \rangle = 1$ . Setze nun  $u = \sinh(t)e_3 + \cosh(t)v$ . Es gilt  $Dr(p)(w) = 0$  und  $Dr(p)(u) = 1$ , da

$$r(\cosh(t + \tau)e_3 + \sinh(t + \tau)(\cos(\varphi)v + \sin(\varphi)w)) = t + \tau.$$

Weiter ist  $v, w$  nach Lemma 7.2 eine Orthonormalbasis von  $T_p M$ . Folglich ist

$$\langle c'(t), c'(t) \rangle \geq \langle c'(t), u \rangle^2 = (f \circ c'(t))^2.$$

**Behauptung.** Die Funktion  $r: \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ist 1-Lipschitz stetig.

Es reicht zu zeigen, dass für jede stückweise  $C^1$ -Kurve  $c: [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^n$  gilt  $L_{hyp}(c) \geq L(r \circ c)$ . Dies folgt aber unmittelbar aus der letzten Behauptung:

$$L_{hyp}(c) = \int_0^1 \langle c'(t), c'(t) \rangle^{1/2} dt \geq \int_0^1 |r \circ c'(t)| dt = L(r \circ c).$$

Aus der 1-Lipschitz Stetigkeit von  $r$  folgt nun

$$t = r(\cosh(t)e_3 + \sinh(t)v) \leq d_{hyp}(e_3, \cosh(t)e_3 + \sinh(t)v).$$

Andererseits ist  $c(s) = \cosh(st)e_3 + \sinh(st)v$  ( $s \in [0, 1]$ ) eine  $C^1$  Kurve mit  $L_{hyp}(c) = t$  und nach Definition gilt mithin

$$d_{hyp}(e_3, \cosh(t)e_3 + \sinh(t)v) \leq L_{hyp}(c) \leq t.$$

Folglich  $d_{hyp}(e_3, \cosh(t)e_3 + \sinh(t)v) = t$ .

□

**Satz 7.5.**  $\mathbb{H}^2$  ist ein geodätischer Raum und alle Geodätischen sind von der Form

$$c(t) = \cosh(\lambda t)p + \sinh(\lambda t)v$$

wobei  $p \in \mathbb{H}$  und  $v$  ein Einheitsvektor in  $T_p\mathbb{H} = p^\perp(\langle \cdot, \cdot \rangle)$

**Satz 7.6.** Jede Isometrie  $\iota: \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$  ist von der Form  $\iota = A|_{\mathbb{H}^2}$  mit  $A \in O_+(2, 1)$

BEWEIS. Gemäß Lemma 7.3 gibt es ein  $A \in O_+(2, 1)$  mit  $A\iota(e_3) = e_3$ . Setze nun  $\bar{\iota} := A \circ \iota$ . Nun ist  $\bar{\iota}$  ebenfalls eine Isometrie mit  $\bar{\iota}(e_3) = e_3$ . Sei  $b_1 := \cosh(1)e_3 + \sinh(1)e_1$ . Beachte dass aus Satz 7.4 unmittelbar folgt  $d_{hyp}(e_3, b_1) = 1$ . Somit auch  $d_{hyp}(e_3, \bar{\iota}(b_1)) = 1$ . Mittels Satz 7.4 folgt also, dass die  $z$ -Komponente von  $\bar{\iota}(b_1)$  gegeben ist durch  $\cosh(1)$ . Wegen Lemma 7.2 a) ist also  $\bar{\iota}(b_1) = \cosh(1) + \sinh(1)v$  mit einem Einheitsvektor  $v \in \text{span}_{\mathbb{R}}(e_1, e_2)$ . Beachte nun, dass die Drehungen um die  $z$ -Achse lineare Abbildung in  $O_+(2, 1)$  sind.

Folglich gibt es ein  $B \in O_+(2, 1)$  mit  $B(e_3) = e_3$  und  $B\bar{\iota}(b_1) = b_1$ . Setze nun  $\tilde{\iota} = B \circ \bar{\iota}$ . Dann ist also  $\tilde{\iota}(e_3) = e_3$  und  $\tilde{\iota}(b_1) = b_1$ .

Sei  $b_2 := \cosh(1)e_3 + \sinh(1)e_2$ . Wie zuvor folgt  $\tilde{\iota}(b_2) = \cosh(1) + \sinh(1)w$  mit einem Einheitsvektor  $w \in \text{span}_{\mathbb{R}}(e_1, e_2)$ . Jetzt haben wir jedoch die zusätzliche Bedingung  $d_{hyp}(\tilde{\iota}(b_2), b_1) = d_{hyp}(b_2, b_1)$ . Wegen Satz 7.4 ist die äquivalent mit

$$\langle \tilde{\iota}(b_2), b_1 \rangle = \langle b_2, b_1 \rangle = \cosh^2 1.$$

Mithin  $w \perp e_1$  und also  $w = \pm e_2$ . Da die Spiegelung an der  $e_1, e_3$ -Ebene ebenfalls ein Element in  $O_+(2, 1)$  beschreibt, gibt es also ein  $C \in O(2, 1)$  mit  $Ce_3 = e_3$ ,  $Cb_1 = b_1$  und  $C\tilde{\iota}(b_2) = b_2$ .

Die Isometrie  $\hat{\iota} := C \circ \tilde{\iota}$  fixiert also die linearen unabhängigen Vektoren  $b_1, b_2$  und  $b_3 := e_3$ .

Da  $\hat{\iota}$  den hyperbolischen Abstand erhält gilt wegen Satz 7.4

$$\langle \hat{\iota}(p), b_i \rangle = \langle p, b_i \rangle \text{ für alle } p \in \mathbb{H}^2, i = 1, 2, 3.$$

Da  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  nicht degeneriert ist folgt  $\hat{\iota}(p) = p$  für alle  $p \in \mathbb{H}^2$ . Zurückrechnen liefert  $\iota = A^{-1}B^{-1}C|_{\mathbb{H}^2}^{-1}$ .  $\square$

## 7.2 Trigonometrie von Dreiecken in $\mathbb{H}^2$ .

**Satz 7.7.** Sind  $A, B, C \in \mathbb{H}^2$  so gelten für das zugehörige geodätische Dreieck mit Seitenlängen  $a, b$  und  $c$  und Winkeln  $\alpha, \beta$  und  $\gamma$  die folgenden Formeln

a)  $\cosh(c) = \cosh(a) \cdot \cosh(b) - \sinh(a) \sinh(b) \cos(\gamma)$  (Seitenkosinussatz)  
und die entsprechenden permutierten Gleichungen.

b)  $\frac{\sinh(a)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sinh(b)}{\sin(\beta)} = \frac{\sinh(c)}{\sin(\gamma)}$  (Sinussatz)

c)  $\cos(\gamma) = -\cos(\alpha) \cos(\beta) + \sin(\alpha) \sin(\beta) \cosh(c)$  (Winkelkosinussatz)  
und die entsprechenden permutierten Gleichungen.

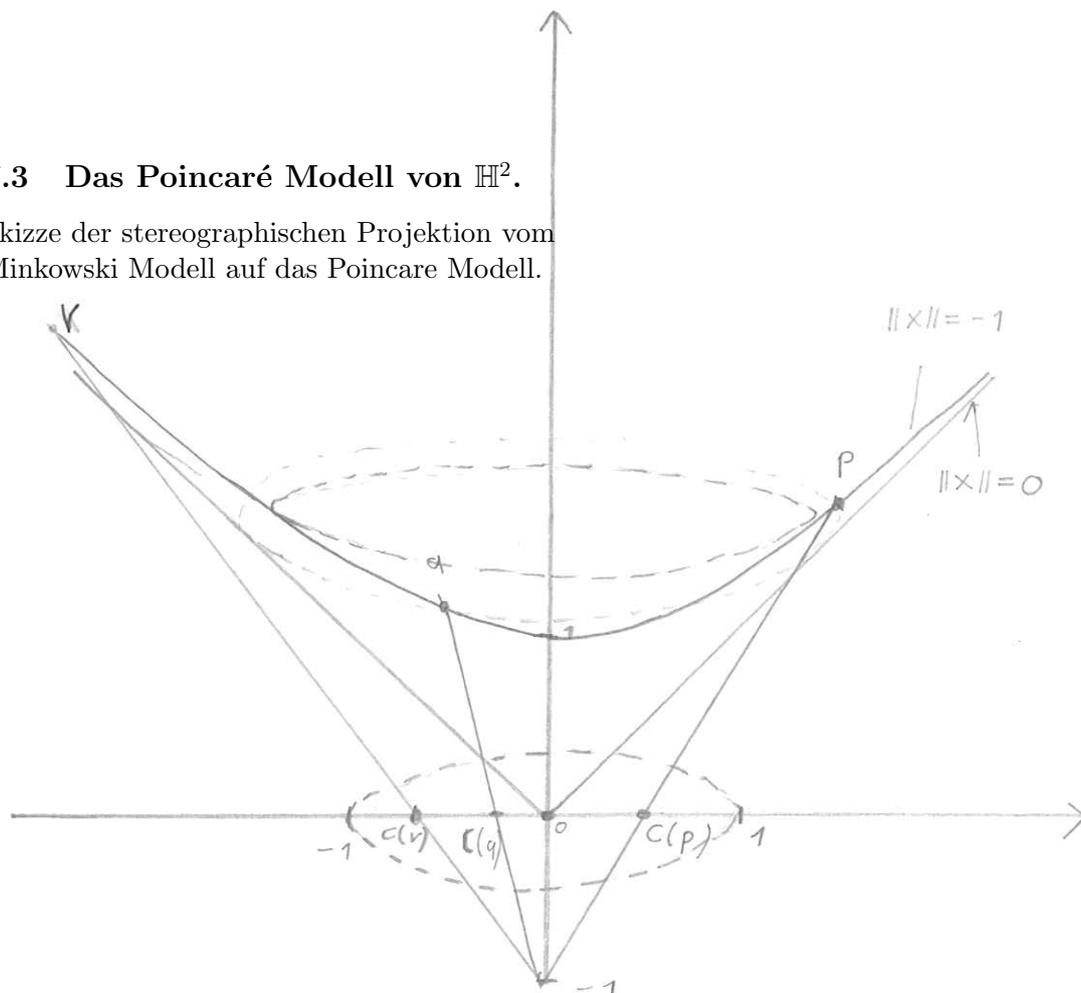
d)  $\alpha + \beta + \gamma \leq \pi$  mit Gleichheit nur dann, wenn alle drei Seiten in einer einzigen Geodätischen enthalten sind.

BEWEIS.

□

### 7.3 Das Poincaré Modell von $\mathbb{H}^2$ .

Skizze der stereographischen Projektion vom Minkowski Modell auf das Poincaré Modell.



**Definition 7.8.** Wir definieren für die Einheitskreis

$$\mathbb{E} := \{v \in \mathbb{R}^2 \mid \|v\| < 1\}$$

die hyperbolische Länge einer stückweisen  $C^1$  Kurve  $c: [0, 1] \rightarrow \mathbb{E}$  durch

$$L_{hyp}(c) := \int_0^1 \left( \frac{4\langle c'(t), c'(t) \rangle}{(1 - \|c(t)\|^2)^2} \right)^{1/2} dt$$

und setzen für  $p, q \in \mathbb{E}$

$$d_{hyp}(p, q) = \inf \{L_{hyp}(c) \mid c(0) = p, c(1) = q\}.$$

**Bemerkung 7.9.** Setzt man  $g_p(u, v) = \frac{4\langle u, v \rangle}{(1 - \|p\|^2)^2}$  für  $p \in \mathbb{E}$ , so gilt offenbar

$$L_{hyp}(c) = \int_0^1 \sqrt{g_{c(t)}(c'(t), c'(t))} dt = \int_0^1 \|c'(t)\|_{g_{c(t)}} dt.$$

**Satz 7.10.** *Die Abbildung*

$$\iota: \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{E}, \quad q \mapsto \frac{(q_1, q_2)^{tr}}{1 + q_3}$$

ist eine Isometrie, d.h.  $d_{hyp}(p, q) = d_{hyp}(\iota(p), \iota(q))$

BEWEIS. Zunächst einmal ist klar dass man  $\iota$  zu einer  $C^\infty$ -Abbildung  $U \rightarrow \mathbb{R}^2$  fortsetzen kann, wobei  $U = \{q \in \mathbb{R}^3 \mid q_3 > 0\}$ . Weiterhin gilt für  $q \in \mathbb{H}$  die Gleichung  $q_3 = \sqrt{1 + q_1^2 + q_2^2}$  und mithin  $\iota(q) \in \mathbb{E}$ .

**Behauptung 1.** Ist  $p \in \mathbb{H}^2$  und versehen wir  $T_p\mathbb{H}^2$  mit dem durch  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  induzierten Skalarprodukt und  $\mathbb{R}^2$  mit dem Skalarprodukt  $g_{\iota(p)}$  aus Bemerkung 7.9 so ist  $D\iota(p): T_p\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine lineare Isometrie. Es gilt mithin für jede  $C^1$  Kurve  $c: [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2$  die Identität  $\langle c'(t), c'(t) \rangle = g_{\iota(c(t))}(\iota \circ c'(t), \iota \circ c'(t))$ .

Wähle gemäß Lemma 7.2 ein  $t \geq 0$  und  $v \in \text{span}_{\mathbb{R}}(e_1, e_2) = \mathbb{R}^2$  mit  $p = \cosh(t)e_3 + \sinh(t)v$ . Sei weiterhin  $w \in \text{span}_{\mathbb{R}}(e_1, e_2)$  ein Einheitsvektor senkrecht zu  $v$ . Dann bilden nach Lemma 7.2 die Vektoren  $b_1 = \sinh(t)p + \cosh(t)v$  und  $b_2 = w$  eine Orthonormalbasis von  $T_p\mathbb{H}^2$ . Es reicht nun nachzurechnen, dass die Vektoren  $D\iota(p)b_1$  und  $D\iota(p)b_2$  eine Orthonormalbasis von  $\mathbb{R}^2$  bzgl. des Skalarproduktes  $g_{\iota(p)}$  bilden.

$$\iota(p) = \frac{\sinh(t)}{1 + \cosh(t)}v \quad (2.4)$$

Wegen  $b_1 = \frac{d}{dt} \cosh(t)e_3 + \sinh(t)v$  gilt

$$\begin{aligned} D\iota(p)b_1 &= \frac{d}{dt} \iota(\cosh(t)e_3 + \sinh(t)v) = \frac{d}{dt} \frac{\sinh(t)}{1 + \cosh(t)}v \\ &= \frac{\cosh(t)(1 + \cosh(t)) - \sinh^2(t)}{(1 + \cosh(t))^2}v = \frac{1}{1 + \cosh(t)}v. \end{aligned}$$

Ähnlich folgt wegen  $\sinh(t) \cdot b_2 = \frac{d}{d\varphi}|_{\varphi=0} \cosh(t)e_3 + \sinh(t)(\cos(\varphi)v + \sin(\varphi)w)$ , dass gilt

$$\begin{aligned} D\iota(p)b_2 &= \frac{1}{\sinh(t)} \frac{d}{d\varphi}|_{\varphi=0} \iota(\cosh(t)e_3 + \sinh(t)(\cos(\varphi)v + \sin(\varphi)w)) \\ &= \frac{1}{1 + \cosh(t)}w. \end{aligned}$$

Damit gilt offenbar  $g_{\iota(p)}(D\iota(p)b_1, D\iota(p)b_2) = 0$  und

$$\begin{aligned} g_{\iota(p)}(D\iota(p)b_1, D\iota(p)b_1) &= g_{\iota(p)}(D\iota(p)b_2, D\iota(p)b_2) \\ &= \frac{4}{(1 - \|\iota(p)\|^2)^2} \cdot \frac{1}{(1 + \cosh(t))^2} \\ &\stackrel{(2.4)}{=} \left( \frac{2(1 + \cosh(t))}{(1 + \cosh(t))^2 - \sinh^2(t)} \right)^2 = 1. \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

**Behauptung 2.**  $\iota: \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{E}$  ist bijektiv.

Man rechnet leicht nach, dass die Umkehrabbildung von  $\iota$  gegeben ist durch

$$\mathbb{E} \rightarrow \mathbb{H}^2, \quad v \mapsto \frac{1}{1 - \|v\|^2} \begin{pmatrix} 2v \\ 1 + \|v\|^2 \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

**Behauptung 3.**  $\iota$  ist eine Isometrie.

Nach der ersten Behauptung gilt für eine stückweise  $C^1$ -Kurve  $c: [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2$ , dass

$$\begin{aligned} L_{hyp}(c) &= \int_0^1 \langle c'(t), c'(t) \rangle dt \\ &= \int_0^1 g_{\iota(c(t))}(\iota \circ c'(t), \iota \circ c'(t)) dt \\ &= L_{hyp}(\iota \circ c). \end{aligned}$$

Mithin gilt für  $p, q \in \mathbb{H}^2$

$$\begin{aligned} d_{hyp}(p, q) &= \inf\{L_{hyp}(c) \mid c: [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2, c(0) = p, c(1) = q\} \\ &= \inf\{L_{hyp}(\iota \circ c) \mid c: [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2, c(0) = p, c(1) = q\} \\ &= \inf\{L_{hyp}(\gamma) \mid \gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{E}, \gamma(0) = \iota(p), \gamma(1) = \iota(q)\} \\ &= d_{hyp}(\iota(p), \iota(q)). \end{aligned}$$

□

**Korollar 7.11.**  $\mathbb{E}$  ist ein geodätischer Raum und die Bilder der Geodätischen in  $\mathbb{E}$  sind entweder gegeben durch

- Durchmesser von  $\mathbb{E}$  oder
- Kreisbögen die den Rand von  $\mathbb{E}$  senkrecht schneiden.

Da  $(\mathbb{H}^2, d_{hyp})$  und  $(\mathbb{E}^2, d_{hyp})$  isometrisch sind ist klar, dass  $(\mathbb{E}^2, d_{hyp})$  ein geodätischer Raum ist. Weiterhin ist klar, dass die Geodätischen in  $\mathbb{E}$  genau die Bilder von Geodätischen in  $\mathbb{H}^2$  unter  $\iota$  sind. Nicht so klar ist hingegen, dass diese Geodätischen in  $\mathbb{E}$  die im Korollar beschriebene Form haben:

Für eine Geodätsche in  $\mathbb{H}^2$  durch  $e_3$  gilt

$$c(t) = \cosh(t)e_3 + \sinh(t)v$$

mit mit einem Einheitsvektor  $v \in \text{span}_{\mathbb{R}}(e_1, e_2)$ . Damit ist aber klar, dass  $\iota c(t) = \frac{\sinh(t)}{1+\cosh(t)}v$  einen Durchmesser durchläuft.

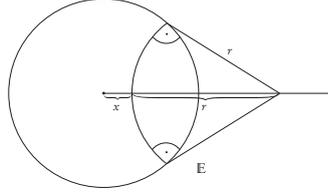
Es sei nun  $c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^2$  eine Geodätische, die nicht durch  $e_3$  läuft. Nach Verschieben des Anfangspunktes auf  $c$  können wir annehmen, dass  $d_{hyp}(e_3, c(0)) = \min\{d_{hyp}(c(t), e_3) \mid t \in \mathbb{R}\}$  gilt. Nach einer Rotation um die  $z$ -Achse können wir weiter  $c(0) = \cosh(s_0)e_3 + \sinh(s_0)e_1$  annehmen. Auf Grund des minimalen Abstandes von  $c(0)$  zu  $e_3$ , folgt leicht  $c'(t) \in \mathbb{R}e_2$  (man kann zum Beispiel den Kosinussatz benutzen).

Es gilt also nach Umparametrisieren

$$c(t) = \cosh(t)(\cosh(s_0)e_3 + \sinh(s_0)e_1) + \sinh(t)e_2$$

$$\iota(c(t)) = \frac{\cosh(t)\sinh(s_0)e_1 + \sinh(t)e_2}{1 + \cosh(t)\cosh(s_0)}$$

Setze  $x = \frac{\sinh(s_0)}{1 + \cosh(s_0)}$ . Es gilt dann  $\sinh(s_0) = \frac{2x}{1-x^2}$  und  $\cosh(s_0) = \frac{1+x^2}{1-x^2}$



Gemäß der Skizze müssen wir zeigen, dass die Kurve  $\iota(c(t))$  einen Kreisbogen mit Radius  $r$  um den Punkt  $(x+r)e_1$  beschreibt. Dabei gilt nach dem Satz des Pythagoras  $r^2 + 1 = (x+r)^2$ . Also  $r = \frac{1-x^2}{2x}$  und  $r+x = \frac{1+x^2}{2x}$ . Es reicht nun zu zeigen, dass  $\iota(c(t))$  konstanten Abstand zu  $\frac{1+x^2}{2x}e_1$  hat. Zu zeigen ist also

$$\begin{aligned} 1 &\stackrel{!}{=} \frac{4x^2}{(1-x^2)^2} \left\| \frac{1+x^2}{2x}e_1 - \frac{\cosh(t)2xe_1 + (1-x^2)\sinh(t)e_2}{1-x^2 + \cosh(t)(1+x^2)} \right\|^2 \\ &= \frac{4x^2}{(1-x^2)^2} \left\| \frac{(1+x^2)(1-x^2) + \cosh(t)(1+x^2)^2 - 4x^2\cosh(t)}{2x(1-x^2 + \cosh(t)(1+x^2))}e_1 - \frac{(1-x^2)\sinh(t)}{1-x^2 + \cosh(t)(1+x^2)}e_2 \right\|^2 \\ &= \left\| \frac{(1+x^2) + \cosh(t)(1-x^2)}{1-x^2 + \cosh(t)(1+x^2)}e_1 - \frac{2x\sinh(t)}{1-x^2 + \cosh(t)(1+x^2)}e_2 \right\|^2 \\ &= \frac{(1+x^2)^2 + 2\cosh(t)(1-x^4) + \cosh^2(t)(1-x^2)^2 + 4x^2(\cosh^2(t) - 1)}{(1-x^2 + \cosh(t)(1+x^2))^2} \\ &= \frac{(1-x^2)^2 + 2\cosh(t)(1-x^4) + \cosh^2(t)(1+x^2)^2}{(1-x^2 + \cosh(t)(1+x^2))^2} \end{aligned}$$

und dieser Ausdruck ist in der Tat gleich 1.

**Korollar 7.12.** *Der hyperbolische Abstand in  $\mathbb{E}$  ist gegeben durch*

$$d_{hyp}(v, w) = \operatorname{arccosh}\left(1 + \frac{2\|v-w\|^2}{(1-\|v\|^2)(1-\|w\|^2)}\right) \text{ für } v, w \in \mathbb{E}.$$

Dies folgt durch einfache Rechnung aus (2.5) und Satz 7.4.

**Lemma 7.13.** *Jede Isometrie  $\sigma: (\mathbb{E}, d_{hyp}) \rightarrow (\mathbb{E}, d_{hyp})$  ist  $C^\infty$  und für jedes  $v \in \mathbb{E}$  gilt*

- $D\sigma(v): (\mathbb{R}^2, g_v) \rightarrow (\mathbb{R}^2, g_{\sigma(v)})$  ist eine lineare Isometrie der Euklidischen Vektorräume, wobei die Skalarprodukte  $g_v$  und  $g_{\sigma(v)}$  wie in Bemerkung 7.9 definiert sind.*
- $\sigma$  ist durch  $\sigma(v)$  und  $D\sigma(v)$  bereits eindeutig bestimmt.*

BEWEIS. Es sei  $\iota: \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{E}$  die stereographische Projektion, vergleiche Satz 7.10, und  $\iota^{-1}$  die Umkehrabbildung, vergleiche (2.5). Aus den Sätzen 7.6 und 7.10 folgt: jede Isometrie hat die Form  $\iota A \iota^{-1}$  wobei  $A \in O_+(2, 1)$ . Insbesondere ist also jede Isometrie  $\sigma$  eine  $C^\infty$  Abbildung.

Es sei  $c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}$  eine Geodätische in  $\mathbb{E}$  mit  $c(0) = v$ . Es gilt also  $d_{hyp}(c(t), c(s)) = L|t - s|$  für ein  $L > 0$ . Insbesondere folgt  $g_{c(t)}(c'(t), c'(t)) = L$ .

Da  $\sigma$  eine Isometrie ist, folgt weiter  $d_{hyp}(\sigma(c(t)), \sigma(c(s))) = L|t - s|$  und mithin auch  $g_{\sigma(c(t))}(\sigma \circ c'(t), \sigma \circ c'(t)) = L$ . Insbesondere gilt

$$g_p(c'(0), c'(0)) = g_{\sigma(p)}(D\sigma(p)c'(0), D\sigma(p)c'(0)).$$

Da diese Rechnung für alle Geodätischen durch  $p$  gilt, können wir in der letzten Gleichung  $c'(0)$  durch einen beliebigen Vektor in  $w \in \mathbb{R}^2$  ersetzen. Damit folgt a).

Da jede Isometrie von  $\mathbb{E}$  von der Form  $\iota A \iota^{-1}$  ist mit  $A \in O_+(2, 1)$  reicht es für b) zu zeigen: Ist  $p \in \mathbb{H}^2$  und  $A, B \in O_+(2, 1)$  mit  $Ap = Bp$  und  $A|_{T_p\mathbb{H}^2} = B|_{T_p\mathbb{H}^2}$  so folgt  $A = B$ . Letzteres folgt aber trivial aus der Linearität von  $A$  und  $B$ .  $\square$

**Satz 7.14.** *Ist  $\sigma: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$  eine Isometrie dann gibt es  $\varphi \in [0, 2\pi)$  und  $z_0 \in \mathbb{E} \subset \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ , so dass eine der folgenden Gleichungen gilt*

- $\bullet \sigma(z) = e^{i\varphi} \frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}$  für alle  $z \in \mathbb{E}$  oder
- $\bullet \sigma(z) = e^{i\varphi} \frac{\bar{z}-\bar{z}_0}{1-z_0 \bar{z}}$  für alle  $z \in \mathbb{E}$ .

*Umgekehrt definiert jede dieser Abbildungen eine Isometrie.*

BEWEIS. Wir wollen zunächst nachrechnen, dass diese Abbildungen in der Tat Isometrien sind. Da die Abbildungen  $z \mapsto e^{i\varphi}z$  und  $z \mapsto \bar{z}$  offensichtlich Isometrien sind reicht es dafür zu zeigen, dass für jedes  $z_0 \in \mathbb{E}$  die Abbildung

$$\sigma(z) = \frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0z}$$

eine Isometrie von  $(\mathbb{E}, d_{hyp})$  definiert. Wir wollen dazu Korollar 7.12 benutzen. Bei der Identifizierung  $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$  gehen dabei Normen  $\|\cdot\|$  in Beträge  $|\cdot|$  über.

Seien  $a, b \in \mathbb{E}$  und wir nehmen zunächst zusätzlich an  $\sigma(a), \sigma(b) \in \mathbb{E}$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{|\sigma(a)-\sigma(b)|^2}{(1-|\sigma(a)|^2)(1-|\sigma(b)|^2)} &= \frac{|(a-z_0)(1-\bar{z}_0b) - (b-z_0)(1-\bar{z}_0a)|^2}{(|1-\bar{z}_0a|^2 - |a-z_0|^2)(|1-\bar{z}_0b|^2 - |b-z_0|^2)} \\ &= \frac{|a-b + |z_0|^2b - |z_0|^2a|^2}{(1+|z_0|^2|a|^2 - |a|^2 - |z_0|^2)(1+|z_0|^2|b|^2 - |b|^2 - |z_0|^2)} \\ &= \frac{(1-|z_0|^2)^2|a-b|^2}{(1-|z_0|^2)^2(1-|a|^2)(1-|b|^2)} \\ &= \frac{|a-b|^2}{(1-|a|^2)(1-|b|^2)} \end{aligned}$$

und wegen Korollar 7.12 ist dies gleichbedeutend mit  $d_{hyp}(a, b) = d_{hyp}(\sigma(a), \sigma(b))$ . Es folgt nun darüber hinaus, dass für  $b \in \mathbb{E}$  auch  $\sigma(b) \in \mathbb{E}$  ist. Man rechnet leicht nach dass die Umkehrabbildung von  $\sigma$  gegeben ist durch

$$z \mapsto \frac{z+z_0}{1+\bar{z}_0z}.$$

Zusammenfassend können wir also sagen, dass  $\sigma$  eine abstandserhaltende Bijektion und mithin eine Isometrie ist.

Es bleibt noch zu zeigen, dass alle Isometrien die im Satz beschriebene Form haben. Dazu benutzen wir Lemma 7.13. Es sei  $\sigma$  nun eine beliebige Isometrie von  $\mathbb{E}$ . Dann gibt es ein  $z_0 \in \mathbb{E}$  mit  $\sigma(z_0) = 0$ . Wir wissen dann, dass  $D\sigma(z_0): (\mathbb{R}^2, g_{z_0}) \rightarrow (\mathbb{R}^2, g_0)$  eine lineare Isometrie ist.

Ist die Determinante dieser linearen Abbildung positiv so folgt leicht, dass es ein  $\varphi \in [0, 2\pi)$  gibt, so dass die Abbildung  $\tilde{\sigma}(z) := e^{i\varphi} \frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0z}$  den Gleichungen  $\tilde{\sigma}(z_0) = 0$  und  $D\sigma(z_0) = D\tilde{\sigma}(z_0)$  genügt.

Ist die Determinante von  $D\sigma(z_0)$  negativ so sieht man ebenso leicht, dass es ein  $\varphi \in [0, 2\pi)$  gibt, so dass die Abbildung  $\tilde{\sigma}(z) := e^{i\varphi} \frac{\bar{z}-\bar{z}_0}{1-z_0\bar{z}}$  den Gleichungen  $\tilde{\sigma}(z_0) = 0$  und  $D\sigma(z_0) = D\tilde{\sigma}(z_0)$  genügt.

In beiden Fällen folgt aus Lemma 7.13, dass  $\sigma = \tilde{\sigma}$  gilt.  $\square$

### 7.4 Das Poincaré–Halbebenen–Modell.

**Definition 7.15.** Wir setzen  $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\} \subset \mathbb{C}$ . Um es von  $\mathbb{H}^2 \subset \mathbb{R}^{2,1}$  zu unterscheiden lassen wir den Index, der die reelle Dimension andeutet, weg. Wir definieren ein Skalarprodukt durch

$$g_z^{\mathbb{H}}(v, w) = \frac{\langle v, w \rangle}{y^2} \text{ für alle } v, w \in \mathbb{R}^2 \text{ und } z = x + iy \in \mathbb{H}.$$

und bezeichnen mit  $\|v\|_{g_z^{\mathbb{H}}} = \sqrt{g_z^{\mathbb{H}}(v, v)}$  die zugehörige Norm. Die hyperbolische Länge einer stückweisen  $C^1$  Kurve  $c: [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}$  erklären wir durch

$$L_{hyp}(c) := \int_0^1 \|c'(t)\|_{g_z^{\mathbb{H}}} dt.$$

Schließlich setzen wir für  $z_1, z_2 \in \mathbb{H}$

$$d_{hyp}(z_1, z_2) = \inf\{L_{hyp}(c) \mid c(0) = z_1, c(1) = z_2\}.$$

**Satz 7.16.** Die Cayley Abbildung  $\iota: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{E}$ ,  $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$  ist eine Isometrie  $(\mathbb{H}, d_{hyp}) \rightarrow (\mathbb{E}, d_{hyp})$ .

BEWEIS. Zunächst einmal ist klar dass für jedes  $z \in \mathbb{H}$  der Imaginär Teil von  $z + i$  betragsmäßig größer ist als der Imaginär Teil von  $z - i$ . Da die Realteile gleich sind folgt  $|z + i| > |z - i|$  und mithin  $\iota(z) \in \mathbb{E}$ . Man rechnet nun leicht nach, dass  $z \mapsto i \frac{z+1}{1-z}$  eine Umkehrabbildung von  $\iota$  ist. Insbesondere ist  $\iota$  eine Bijektion.

**Behauptung.**  $\iota$  ist  $C^\infty$  und die lineare Abbildung  $D\iota(z): \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ , die durch die Jacobimatrix von  $\iota$  in  $z$  induziert wird, genügt der Gleichung  $D\iota(z)(c) = \frac{2i}{(z+i)^2}c$  für alle  $c \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ .

Klar ist, dass  $\iota$  eine  $C^\infty$  Abbildung ist. Sei nun  $c \in \mathbb{C}$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} D\iota(z)(c) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \iota(z + tc) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \frac{z+tc-i}{z+tc+i} \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \frac{z+tc-i}{z+i} \cdot \frac{1}{1 + \frac{tc}{z+i}} = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \frac{z+tc-i}{z+i} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{tc}{z+i}\right)^k. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung gilt falls  $|\frac{tc}{z+i}| < 1$  und mithin für alle kleinen  $t$  (geometrische Reihe). Wir können nun leicht nach  $t$  differenzieren und erhalten

$$D\iota(z)(c) = \frac{c}{z+i} - \frac{(z-i)c}{(z+i)^2} = \frac{2i}{(z+i)^2}c.$$

**Behauptung.** Es gilt  $g_z^{\mathbb{H}}(v, v) = g_{\iota(z)}^{\mathbb{E}}(D\iota(z)v, D\iota(z)v)$  wobei  $g_{\iota(z)}^{\mathbb{E}}$  das Skalarprodukt aus Bemerkung 7.9 bezeichnet.

Es ist

$$\begin{aligned}\langle D\iota(z)v, D\iota(z)v \rangle &= |D\iota(z)v|^2 = \left| \frac{2i}{(z+i)^2} \right|^2 |v|^2 \\ &= \left| \frac{2}{(z+i)^2} \right|^2 \langle v, v \rangle\end{aligned}$$

und mithin

$$\begin{aligned}\frac{g_{\iota(z)}^{\mathbb{E}}(D\iota(z)v, D\iota(z)v)}{\langle v, v \rangle} &= \frac{4}{(1-|\iota(z)|^2)^2} \cdot \frac{4}{|z+i|^4} = \frac{16}{(|z+i|^2 - |z-i|^2)^2} \\ &= \frac{16}{((z+i)(\bar{z}-i) - (z-i)(\bar{z}+i))^2} = \frac{16}{(2i(\bar{z}-z))^2} = \frac{1}{y^2}\end{aligned}\quad (2.6)$$

wie behauptet.

Aus der letzten Behauptung ergibt sich nun, dass für eine stückweise  $C^1$  Kurve  $c: [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}$  mit  $c(0) = z_1$  und  $c(1) = z_2$  gilt

$$\begin{aligned}L_{hyp}(c) &= \int_0^1 \|c'(t)\|_{g_z^{\mathbb{H}}} dt = \int_0^1 \|D\iota(c(t))c'(t)\|_{g_{\iota(c(t))}^{\mathbb{E}}} dt \\ &= \int_0^1 \|\iota \circ c'(t)\|_{g_{\iota(c(t))}^{\mathbb{E}}} dt \\ &= L_{hyp}(\iota \circ c)\end{aligned}$$

Nehmen wir in dieser Gleichung das Infimum über alle solchen Kurven so ergibt sich  $d_{hyp}(z_1, z_2) = d_{hyp}(\iota(z_1), \iota(z_2))$  und also ist  $\iota$  eine Isometrie.  $\square$

**Korollar 7.17.** Für  $z_1, z_2 \in \mathbb{H}$  gilt  $d_{hyp}(z_1, z_2) = \operatorname{arccosh}\left(1 + \frac{|z_1 - z_2|^2}{2y_1 y_2}\right)$ , wobei  $y_1$  und  $y_2$  die Imaginärteile von  $z_1$  und  $z_2$  bezeichnen.

BEWEIS. Die Aussage ergibt sich durch einfache Rechnung aus Satz 7.16 und Korollar 7.12: Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{2|\iota(z_1) - \iota(z_2)|^2}{(1-|\iota(z_1)|^2)(1-|\iota(z_2)|^2)} &= \frac{2|(z_1 - i)(z_2 + i) - (z_2 - i)(z_1 + i)|^2}{(|z_1 + i|^2 - |z_1 - i|^2)(|z_2 + i|^2 - |z_2 - i|^2)} \\ &= \frac{8|iz_1 - iz_2|^2}{16y_1 y_2} = \frac{|z_1 - z_2|^2}{2y_1 y_2}\end{aligned}$$

wobei wir in der zweiten Gleichung für die Transformation des Nenners die Gleichung (2.6) verwendet haben.  $\square$

**Satz 7.18.** Es sei  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}(2, \mathbb{C})$ . Dann überführt die Abbildung

$$m_A: \mathbb{C} \setminus \{-d/c\} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

*Kreise und Geraden in Kreise und Geraden.*

Dabei kann es durchaus vorkommen, dass Kreise auf Geraden und Geraden auf Kreise abgebildet werden.

BEWEIS. Es sei  $B = \begin{pmatrix} u & v \\ x & y \end{pmatrix}$  ebenfalls in  $\text{GL}(2, \mathbb{C})$ . Eine einfache Rechnung zeigt dann, dass gilt

$$m_A \circ m_B = m_{AB}.$$

Insbesondere ist die Umkehrabbildung von  $m_A$  gegeben durch  $m_{A^{-1}}$  und also auch von derselben Form. Deswegen reicht es zu zeigen, dass die Urbilder von Kreisen und Geraden unter  $m_A$  Kreise und Gerade sind.

Es sei  $K \subset \mathbb{C}$  ein Kreis oder eine Gerade. Es ist dann leicht zu sehen, dass es  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  und  $\gamma \in \mathbb{C}$  gibt mit

$$K = \{z \mid \alpha|z|^2 + \text{Re}(\bar{\gamma}z) + \gamma = 0\}.$$

und umgekehrt zeigt man ebenso leicht, dass für jede Wahl von  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  und  $\gamma \in \mathbb{C}$  mit  $(\alpha, \beta, \gamma) \neq 0$  diese Menge ein Kreis, eine Gerade oder leer ist – ein Punkt wird dabei als Kreis vom Radius null angesehen.

Es gilt nun

$$\begin{aligned} m_A^{-1}(K) &= \{z \mid \alpha|m_A(z)|^2 + \text{Re}(\bar{\gamma}m_A(z)) + \gamma = 0\} \\ &= \{z \mid \alpha|az+b|^2 + \text{Re}(\bar{\gamma}(az+b)(\bar{c}\bar{z} + \bar{d})) + \gamma|cz+d|^2 = 0\}. \end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned} |az+b|^2 &= |a|^2|z|^2 + 2\text{Re}(\bar{b}az) + |b|^2|z|^2, \\ \text{Re}(\bar{\gamma}(az+b)(\bar{c}\bar{z} + \bar{d})) &= \text{Re}(\bar{\gamma}\bar{c}a|z|^2 + a\bar{d}z + b\bar{c}\bar{z} + b\bar{d}) \\ &= \text{Re}(\bar{c}a)|z|^2 + \text{Re}(\bar{\gamma}(a\bar{d} + \bar{b}c)z) + \text{Re}(\bar{\gamma}b\bar{d}) \quad \text{und} \\ |cz+d|^2 &= |c|^2|z|^2 + 2\text{Re}(\bar{d}cz) + |d|^2 \end{aligned}$$

folgt nun leicht, dass  $m_A^{-1}(K)$  wiederum ein Kreis oder eine Gerade ist.  $\square$

**Korollar 7.19.** *Die Bilder von Geodätischen sind genau diejenigen Halbkreise und Halbgeraden in  $\mathbb{H}$ , deren Abschlüsse die  $x$ -Achse senkrecht treffen.*

BEWEIS. Nach Korollar 7.11 ist bekannt, dass die Geodätischen in  $\mathbb{E}$  durch Durchmesser und solche Kreisbögen gegeben sind, die (im Abschluss) senkrecht auf  $\partial\mathbb{E}$  treffen.

Da die Cayley Abbildung eine Isometrie von  $\mathbb{H}$  nach  $\mathbb{E}$  ist und die Form aus Satz 7.18 hat folgt, dass auch die Geodätischen in  $\mathbb{H}$  durch Kreisbögen und Halbgeraden gegeben sind. Zunächst einmal ist nicht ganz klar wieso diese wie in  $\mathbb{E}$  senkrecht auf den Rand treffen müssen:

Dazu beachte man, dass sich die Cayley Abbildung  $\iota$  in natürlicher Weise auf  $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$  fortsetzen läßt. Weiterhin ist  $D\iota(z): \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  eine winkeltreue Abbildung, denn dies folgt unmittelbar aus der ersten Behauptung im Beweis von Satz 7.16. Mithin scheiden sich zwei Kurven in  $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$  genau dann senkrecht wenn sich ihre Bildkurven unter  $\iota$  senkrecht schneiden. Damit folgt nun aber bereits das Korollar.  $\square$

## 7.5 Reguläre Pflasterungen

Wir bezeichnen mit  $P$  die Euklidische Ebene  $E$ , die Sphäre  $S = \mathbb{S}^2$  oder die hyperbolische Ebene  $H$ .

**Definition 7.20.** Eine *reguläre Pflasterung* (auch *Kachelung* oder *Parkettierung*) von  $P$  ist eine Überdeckung von  $P$  durch kongruente regelmäßige konvexe  $n$ -Ecke derart, dass jeweils Kanten an Kanten stoßen und Ecken an Ecken. Stoßen bei einer regulären Pflasterung an jeder Ecke  $k$  der  $n$ -Ecke aneinander, so hat die Pflasterung den *Typ*  $\{n, k\}$ . Die Notation  $\{n, k\}$  nennt man auch *Schläfli-Symbol*<sup>1</sup>.

**Satz 7.21.** *Für jeden Typ  $\{n, k\}$  mit  $n, k \in \mathbb{N}$ ,  $n, k \geq 2$  existiert eine reguläre Pflasterung von  $P$ . Der Typ bestimmt dabei eindeutig, ob  $P = E$  oder  $P = S$  oder  $P = H$  gilt gemäß der folgenden Tabelle:*

---

<sup>1</sup>Ludwig Schläfli, 1814-1895, Schweizer Mathematiker

| $n \backslash k$ | 2        | 3        | 4        | 5        | 6        | 7        | 8        | ...      |
|------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 2                | $S$      | ...      |
| 3                | $S$      | $S$      | $S$      | $S$      | $E$      | $H$      | $H$      | ...      |
| 4                | $S$      | $S$      | $E$      | $H$      | $H$      | $H$      | $H$      | ...      |
| 5                | $S$      | $S$      | $H$      | $H$      | $H$      | $H$      | $H$      | ...      |
| 6                | $S$      | $E$      | $H$      | $H$      | $H$      | $H$      | $H$      | ...      |
| 7                | $S$      | $H$      | $H$      | $H$      | $H$      | $H$      | $H$      | ...      |
| 8                | $S$      | $H$      | $H$      | $H$      | $H$      | $H$      | $H$      | ...      |
| $\vdots$         | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\ddots$ |

BEWEIS: Es sei eine reguläre Pflasterung vom Typ  $\{n, k\}$  gegeben. Jedes  $n$ -Eck kann in  $n$  kongruente Dreiecke zerlegt werden, indem der Mittelpunkt  $M$  des Umkreises des  $n$ -Ecks (der aus Symmetriegründen existiert) mit allen Eckpunkten verbunden wird. Wir betrachten ein solches Dreieck; der Winkel bei  $M$  heiße  $\alpha$ , die beiden anderen Winkel sind gleich groß und mogen  $\beta$  heißen. Außerdem bezeichne  $\Sigma$  die Winkelsumme in diesem Dreieck. (Bekanntermaßen hängt  $\Sigma$  in  $S$  und  $H$  vom Dreieck ab.)

Da bei  $M$  gerade  $n$  Dreiecke aneinanderstoßen, gilt  $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ . Bezeichnet  $\gamma$  den Innenwinkel des  $n$ -Ecks, so gilt daher:

$$\gamma = 2\beta = \Sigma - \alpha = \Sigma - \frac{2\pi}{n}$$

Da nach Voraussetzung an jeder Ecke  $k$  der  $n$ -Ecke aneinanderstoßen, gilt weiter

$$2\pi = k\gamma = k\Sigma - 2\pi\frac{k}{n}$$

und daraus folgt:

$$\left(\frac{2}{n} + \frac{2}{k}\right)\pi = \Sigma \begin{cases} > \pi & \text{in } S \\ = \pi & \text{in } E \\ < \pi & \text{in } H \end{cases}$$

Das bedeutet also, falls eine reguläre Pflasterung vom Typ  $\{n, k\}$  existiert, so ist notwendigerweise  $P = S$  bzw.  $= E$  bzw.  $= H$ , je nachdem, ob  $\frac{2}{n} + \frac{2}{k} > 1$  oder  $= 1$  oder  $< 1$  ist. Daraus folgt, wie man leicht überprüft, dass höchstens die in der Tabelle angegebenen Pflasterungen existieren.

Wir wenden uns nun der Existenz zu.

Ist  $k = 2$ , so kommen nur Pflasterungen von  $S$  infrage. Diese existieren offensichtlich auch für jedes  $n \geq 2$ , indem ein  $n$ -Eck einer Hemisphäre entspricht.

Genauso ist die Existenz der Pflasterungen vom Typ  $\{2, k\}$  für jedes  $k \geq 2$  trivial, denn 2-Ecke auf  $S$  existieren für jeden Innenwinkel, wobei die beiden Eckpunkte Antipoden sind.

Die verbleibenden 5 Kandidaten für Pflasterungen von  $S$  korrespondieren zu den 5 Platonischen Körpern, d. h. zu den regulären Polyedern des Euklidischen  $\mathbb{R}^3$ . Wir beweisen ihre Existenz hier nicht. Die Korrespondenz lautet:

| Typ        | Polyeder                             |
|------------|--------------------------------------|
| $\{3, 3\}$ | Tetraeder (Vierflächner)             |
| $\{3, 4\}$ | Oktaeder (Achtflächner)              |
| $\{3, 5\}$ | Ikosaeder (Zwanzigflächner)          |
| $\{4, 3\}$ | Hexaeder (Sechseckflächner / Würfel) |
| $\{5, 3\}$ | Dodekaeder (Zwölfflächner)           |

Jedes dieser Polyeder kann  $S$  einbeschrieben werden. Zentralprojektion auf  $S$  ergibt dann offensichtlich die entsprechenden regulären Pflasterungen. Dies waren alle Kandidaten für Pflasterungen von  $S$ .

Eine reguläre Pflasterung vom Typ  $\{n, k\}$  existiert in  $E$  oder  $H$  genau dann, wenn es ein  $n$ -Eck mit Innenwinkeln  $\gamma = \frac{2\pi}{k}$  gibt. Dies ist äquivalent zur Existenz eines Dreiecks mit Winkeln  $\alpha = \frac{2\pi}{n}$  und zweimal  $\beta = \frac{\pi}{k}$ . In  $E$  gibt es zu 3 beliebig vorgegebenen Winkeln, deren Summe  $\pi$  beträgt, stets ein Dreieck, genauer gesagt sogar eine Schar ähnlicher Dreiecke. Daher existieren die Pflasterungen von  $E$  aus der Tabelle und zwar jeweils mit beliebiger Kantenlänge der  $n$ -Ecke.

Für  $H$  zeigen wir nun: Sind  $\delta, \varphi, \tau > 0$  mit  $\delta + \varphi + \tau < \pi$ , so existiert ein hyperbolisches Dreieck mit Winkeln  $\delta, \varphi, \tau$ . Aus  $\delta < \pi - \varphi - \tau$  folgt nämlich

$$\cos \delta > \cos(\pi - (\varphi + \tau)) = -\cos(\varphi + \tau) = -\cos \varphi \cos \tau + \sin \varphi \sin \tau$$

und daher

$$x := \frac{\cos \delta + \cos \varphi \cos \tau}{\sin \varphi \sin \tau} > 1.$$

Damit ist  $a := \operatorname{arcosh} x \in \mathbb{R}_{>0}$  definiert und analog auch  $b := \operatorname{arcosh} \frac{\cos \varphi + \cos \tau \cos \delta}{\sin \tau \sin \delta} \in \mathbb{R}_{>0}$ . Das hyperbolische Dreieck mit Seitenlängen  $a$  und  $b$  und eingeschlossenem Winkel  $\tau$  existiert offensichtlich und hat nach Konstruktion die Winkel  $\delta, \varphi, \tau$ . Es ist bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

Daraus folgt insbesondere, dass alle Kandidaten für reguläre Pflasterungen von  $H$  existieren. Die  $n$ -Ecke sind dabei bis auf Kongruenz eindeutig.  $\square$

**Korollar 7.22.** *Es kann nicht mehr als 5 reguläre Polyeder im  $\mathbb{R}^3$  geben.*

BEWEIS: Jedes reguläre Polyeder induziert eine nichttriviale (d. h.  $n, k \geq 3$ ) reguläre Pflasterung der Sphäre. Davon gibt es nur 5.  $\square$

Auffallend an der Tabelle ist ihre Symmetrie. Diese erklärt sich wie folgt:

**Definition 7.23.** Zu einer gegebenen regulären Pflasterung vom Typ  $\{n, k\}$  definiert man die *duale Pflasterung*, indem alle Mittelpunkte der  $n$ -Ecke als Eckpunkte dienen. Die Seiten sind alle Verbindungsstrecken zwischen den Mittelpunkten benachbarter  $n$ -Ecke.

**Satz 7.24.** *Ist eine reguläre Pflasterung vom Typ  $\{n, k\}$  gegeben, so ist die duale Pflasterung regulär vom Typ  $\{k, n\}$ . Zweimaliges Dualisieren ist die Identität.*

BEWEIS: Offensichtlich gilt aus Symmetriegründen: Ein Eckpunkt der Pflasterung ist Mittelpunkt eines  $m$ -Ecks der dualen Pflasterung. Hat die Pflasterung den Typ  $\{n, k\}$ , so gilt  $m = k$ , und das  $k$ -Eck ist regelmäßig und konvex. Also ist die duale Pflasterung regulär, und ihr Duales entspricht der ursprünglichen Pflasterung. Mithin ist die duale Pflasterung vom Typ  $\{k, n\}$ .  $\square$

Grafiken von einer Vielzahl von Pflasterungen der hyperbolischen Ebene findet man z. B. unter

<http://www.plunk.org/~hatch/HyperbolicTesselations>

Am bekanntesten für seine künstlerischen Umsetzungen von (hyperbolischer) Geometrie – darunter auch Pflasterungen – dürfte M.C. Escher sein.

[http://euler.slu.edu/escher/index.php/Hyperbolic\\_Geometry](http://euler.slu.edu/escher/index.php/Hyperbolic_Geometry)

# Kapitel 3

## Flächentheorie

### 8 Flächen

**Definition 8.1.**  $U \subset \mathbb{R}^2$  sei offen  $\iota: U \rightarrow \mathbb{R}^3$  sei  $C^\infty$

- $\iota$  heißt eine Immersion falls die Jacobi Matrix  $D\iota(p)$  rang 2 hat für alle  $p \in U$ .
- $\iota$  heißt eine Einbettung falls  $\iota$  eine injektive Immersion ist und die Umkehrabbildung  $\iota^{-1}: \iota(U) \rightarrow U$  stetig ist.
- Eine nicht leere Teilmenge  $F \subset \mathbb{R}^3$  heißt eine (eingebettete) Fläche (oder auch 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit) falls es zu jedem Punkt  $p \in F$  ein  $r > 0$  und eine Einbettung  $\iota: U \rightarrow \mathbb{R}^3$  gibt mit  $\iota(U) = B_r(p) \cap F$ .

**Beispiel.** Es sei  $U \subset \mathbb{R}^2$  offen und  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $C^\infty$  Funktion. Dann ist der Graph von  $f$  eine Einbettung  $\text{graph}(f): U \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, f(x, y))^{tr}$ .

**Bemerkung 8.2.** Das Bild einer Einbettung  $\iota: U \rightarrow \mathbb{R}^3$  ist eine eingebettete Fläche. Weiterhin ist zum Beispiel  $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$  eine eingebettete Fläche.

**Satz 8.3.** Es sei  $\iota: U \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine Immersion. Dann gibt es zu jedem  $p$  eine Umgebung  $U' \subset U$  von  $p$  mit  $\iota|_{U'}: U' \rightarrow \mathbb{R}^3$  ist eine Einbettung.

**Definition 8.4.** Es sei  $V \subset \mathbb{R}^3$  offen und  $f: V \rightarrow \mathbb{R}$  von der Klasse  $C^\infty$ . Ein Punkt  $p \in V$  heißt kritisch falls  $\text{grad}(f)(p) = 0$  andernfalls regulär. Ein Wert heißt  $t \in \mathbb{R}$  heißt regulär wenn jeder Punkt im Urbild  $f^{-1}(t)$  regulär ist.

Man beachte, dass Punkte, die nicht im Bild von  $f$  sind auch reguläre Werte sind.

**Satz 8.5.** Es sei  $V \subset \mathbb{R}^3$  offen und  $f: V \rightarrow \mathbb{R}$  von der Klasse  $C^\infty$ . Weiterhin sei  $t \in \text{Bild}f$  ein regulärer Wert. Dann ist  $f^{-1}(t)$  eine Fläche.

**Satz 8.6.** Ist  $F \subset \mathbb{R}^3$  eine Fläche und  $p \in F$  so läßt sich  $F$  in einer Umgebung von  $p$  als Graph über der  $xy$ -Ebene, der  $xz$ -Ebene oder der  $yz$ -Ebene schreiben.

**Definition 8.7.** Für eine Immersion  $\iota: U \rightarrow \mathbb{R}^3$  ist der erste Fundamentaltensor die Abbildung  $g: U \rightarrow \text{Sym}(2 \times 2, \mathbb{R})$  gegeben durch

$$g_{11} = \left\langle \frac{\partial \iota}{\partial x}, \frac{\partial \iota}{\partial x}(p) \right\rangle, \quad g_{12} = \left\langle \frac{\partial \iota}{\partial x}, \frac{\partial \iota}{\partial y} \right\rangle \text{ und } g_{22} = \left\langle \frac{\partial \iota}{\partial y}, \frac{\partial \iota}{\partial y} \right\rangle.$$

Oftmals werden wir mit  $g(p) = g_p$  auch die zugehörige Bilinearform bezeichnen.

$$g_p(u, v) = \langle D\iota(p)u, D\iota(p)v \rangle$$

**Bemerkung 8.8.**  $g_p$  ist positiv definit für jedes  $p$  und definieren wir für eine stückweise  $C^1$  Kurve  $c: [0, 1] \rightarrow U$  die  $g$ -Länge von  $c$  durch

$$L_g(c) = \int_0^1 \sqrt{g_{c(t)}(c'(t), c'(t))} dt$$

so gilt  $L_g(c) = L(\iota \circ c)$ .

**Beispiel 8.9.** a) Für  $\iota((x, y)) = (\cos(x), \sin(x), y)$  gilt  $g_{ij} \equiv \delta_{ij}$ . Der erste Fundamentaltensor kann also einfach auch wenn das Bild gekrümmt ist. Die Immersion ist die mathematische Entsprechung für das Aufwickeln eines Blattes Papiers zu einem Zylinder. Die Operation erhält die Längen von Kurven, die auf dem Blatt verlaufen.

b) Für  $\iota((x, y)) = (\sinh(x), y, 0)$  gilt  $g_{11}(x, y) = \cosh^2(x)$ ,  $g_{12} = 0$  und  $g_{22} = 1$ . Der erste Fundamentaltensor kann also kompliziert aussehen selbst wenn das Bild denkbar einfach ist.

**Beispiel 8.10.** (Stereographische Projektion der Sphäre) Wir wollen eine Abbildung definieren von der Sphäre ohne den Nordpol in die Ebene,

$$st: \mathbb{S}^2 \setminus \{e_3\} \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

Sei  $E$  die affine Tangentialebene an den Südpol,  $E = -e_3 + \text{span}_{\mathbb{R}}\{e_1, e_2\}$ . Wir definieren für  $p \in \mathbb{S}^2 \setminus \{e_3\}$  den Punkt  $st(p) \in \mathbb{R}^2$  durch folgende Eigenschaft. Der Punkt  $(2 \cdot st(p), -1)^{tr} \in \mathbb{R}^3$  ist Schnittpunkt der Geraden, die durch  $e_3$  und  $p$  verläuft, mit der affinen Ebene  $E$ . Es gilt dann nach dem Strahlensatz

$st(p) = \frac{1}{1-p_3}(p_1, p_2)^{tr}$ . Die Abbildung  $\iota: st^{-1}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2 \setminus \{e_3\}$  ist eine Immersion und für den ersten Fundamentaltensor gilt dann

$$g_{ij}(x) = \frac{4}{(1+|x|^2)^2} \delta_{ij}$$

Man beachte die formale Ähnlichkeit zum hyperbolischen Skalarprodukt im Poincare Modell.

## 9 Zweite Fundamentalform und Krümmungen von Flächen.

**Definition 9.1.** a) Für eine Fläche  $F \subset \mathbb{R}^3$  und  $p \in F$  definieren wir

$$T_p F = \{c'(0) \mid c: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow F \text{ ist } C^1, c(0) = p\}$$

Eine stetige Abbildung  $N: F \rightarrow \mathbb{R}^3$  heißt Einheitsnormalenfeld falls  $N(p) \perp T_p F$  und  $\|N(p)\| = 1$  gilt.

b) Ist  $\iota: U \rightarrow \mathbb{R}^3$  so heißt  $N: U \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein Einheitsnormalenfeld längs  $\iota$  falls  $N(p) \perp \text{Bild } D\iota(p)$  und  $\|N(p)\| = 1$  gilt für alle  $p \in U$ .

c) Ist  $N$  und  $\iota$  wie in b) und  $X: U \rightarrow \mathbb{R}^3$  so definieren wir die Tangentialkomponente von  $X$  durch

$$X^T(p) = X(p) - \langle X(p), N(p) \rangle N(p).$$

Weiterhin erklären wir die zurückgeholte Tangentialkomponente  ${}^T X: U \rightarrow \mathbb{R}^2$  von  $X$  durch die Gleichung

$$D\iota(p) {}^T X(p) = X^T(p).$$

**Lemma 9.2.** Ist  $F$  eine Fläche und  $\iota: U \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine Immersion mit  $\iota(U) \subset F$  so gilt

$$T_{\iota(p)} F = D\iota(p) \mathbb{R}^2$$

Insbesondere ist  $T_p F$  also ein Untervektorraum des  $\mathbb{R}^3$ .

**Definition 9.3.** a) Es sei  $F$  eine Fläche und  $N: F \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein Einheitsnormalenfeld. Die Weingartenabbildung  $W_p: T_p F \rightarrow T_p F$  ist erklärt durch  $W_p v \mapsto \frac{\partial}{\partial v} N(p)$ . Hierbei erklären wir die Richtungsableitung wie folgt. Ist  $c(t) \in F$  eine  $C^1$  Kurve mit  $c(0) = p$  und  $c'(0) = v$  so setzen wir  $\frac{\partial}{\partial v} N(p) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} N(c(t))$ .

- b) Ist  $\iota: U \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine Immersion so erklären wir für  $x \in U$  die zurückgeholte Weingartenabbildung  ${}^T W_x: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  durch  $D\iota(p) {}^T W_x v = W_\iota(x) D\iota(x)v$ .

**Satz 9.4.** Die Weingartenabbildung ist wohldefiniert und es gilt

- a) Ist  $F$  eine eingebettete Fläche so ist  $W_p: T_p F \rightarrow T_p F$  eine selbstadjungierter Endomorphismus
- b) Ist  $\iota: U \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine Immersion mit  $\iota(U) \subset F$  und  $N: U \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein Einheitsnormalenfeld längs  $\iota$ , so gilt für die zurückgeholte Weingartenabbildung die Formel

$$g_x({}^T W u, v) = -\langle N(x), \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial}{\partial v} \iota(x) \rangle = -\left\langle N(x), \begin{pmatrix} \text{Hess}(\iota_1)(x)(u, v) \\ \text{Hess}(\iota_2)(x)(u, v) \\ \text{Hess}(\iota_3)(x)(u, v) \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Weiterhin ist  ${}^T W_x: (\mathbb{R}^2, g_x) \rightarrow (\mathbb{R}^2, g_x)$  ein selbstadjungierter Endomorphismus.

**Definition 9.5.** a) Ist  $\iota: U \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine Immersion so ist die zweite Fundamentalform  $II$  erklärt durch  $II_x(u, v) = g_x({}^T W_x v, w)$ . Die zugehörige symmetrische Matrix bezeichnen wir mit  $h$  – es gilt also  $h_{ij}(x) = II_x(e_i, e_j)$ .

- b) Die Mittlere Krümmung  $H(x)$  ist die Spur von  ${}^T W_x$  die Gaußkrümmung ist gegeben durch  $K(x) := \det({}^T W_x)$ , und die Eigenwerte von  ${}^T W$  heißen Hauptkrümmungen. Schließlich nennt man Eigenvektoren der Länge 1 von  ${}^T W$  Hauptkrümmungsrichtungen.

Man verwendet dieselben Bezeichnungen auf  $T_p F$  wobei man statt der zurückgeholten Weingartenabbildung die Weingartenabbildung verwendet.

**Lemma 9.6.** Ist  $h_{ij}$  die darstellende Matrix der zweiten Fundamentalform,  $g_{ij}$  die erste Fundamentalform und  $g^{ij}$  die inverse Matrix zu  $g_{ij}$  so ist die darstellende Matrix von  ${}^T W_x$  bzgl der kanonischen Einheitsbasis gegeben durch  $(g^{ij})(h_{ij})$ . Insbesondere gilt:

- a) Die Gaußkrümmung genügt der Gleichung  $K(p) = \frac{\det(h_{ij})}{\det(g_{ij})}$
- b) Die mittlere Krümmung ist gegeben durch  $\sum_{i,j=1}^2 g^{ij} h_{ij}$

Im Gegensatz zu  $h_{ij}$  und  $g_{ij}$  ist die Matrix  $w_{ij}$  im allgemeinen nicht symmetrisch. Dies liegt daran, dass  ${}^T W_x$  nur dann ein selbstadjungierter Endomorphismus ist wenn wir  $\mathbb{R}^2$  mit dem Skalarprodukt  $g_x$  versehen. Im allgemeinen ist aber  $e_1$  und  $e_2$  keine Orthonormalbasis bzgl  $g_x$  und also gibt es keinen Grund weswegen die darstellende Matrix symmetrisch sein sollte.